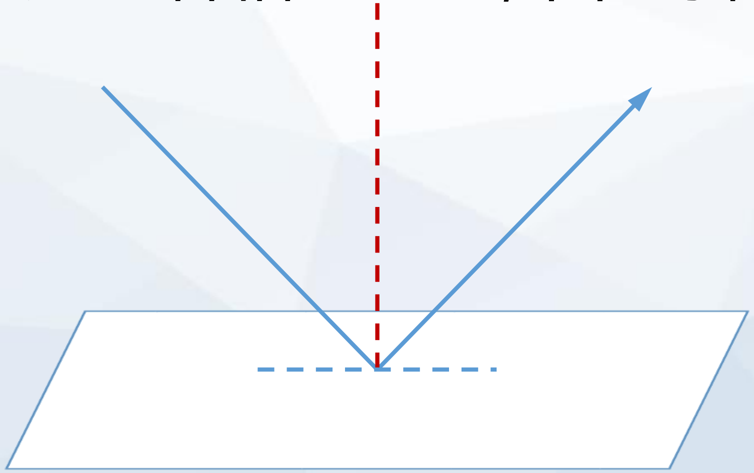
第三章 一元函数微分学

3.1 导数的概念

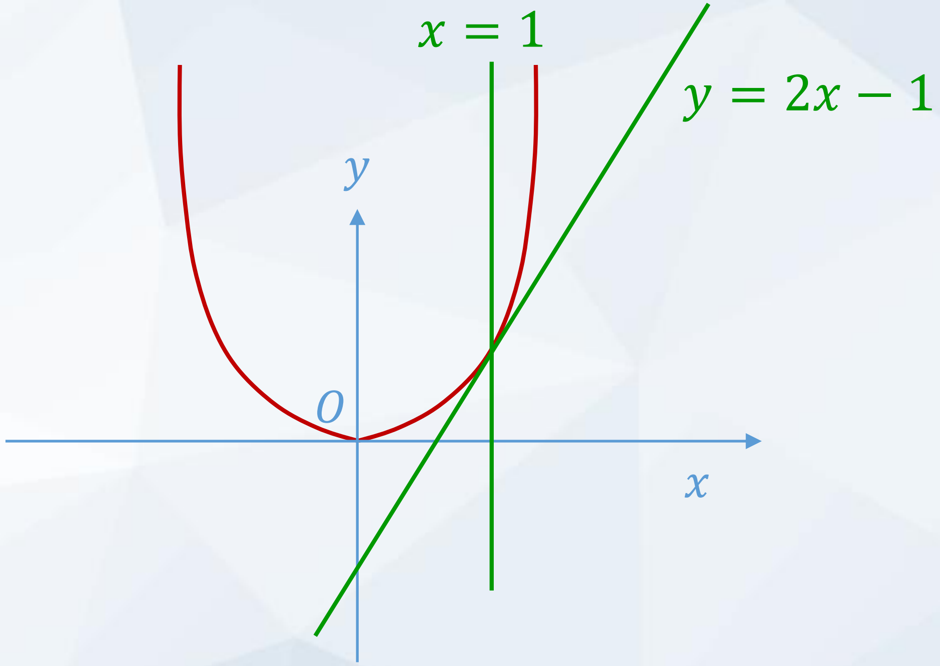
- 导数的思想最初是法国数学家费马为解决极大和极小问题而引入的. 它的建立则是英国数学家牛顿和德国数学家莱布尼兹分别在研究力学和几何学过程中建立的.
- 例 我们知道, 函数 $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ 的图像是一个抛物线, 顶点为 $P\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.
- 当 $a > 0$ 时, 这个抛物线开口向上, 其顶点 P_0 是该图像的最低点, 对应的函数值是这个函数的最小值.
- 当 $a > 0$ 时, 这个抛物线开口向下, 其顶点P_0 是该图像的最高点, 对应的函数值是这个函数的最小值.

- 但如果换一个函数, 例如 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的函数值又是如何变化的呢?
- 如果 $a^2 \le 3b$, 则 y 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调递增函数.
- 如果 $a^2 > 3b$, 则存在 $x_1 < x_2$, y 在 $(-\infty, x_1)$ 上单增, 在 (x_1, x_2) 上单减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单增.
- 这是如何得到的? x_1, x_2 又是如何确定的?? 这就需要用到导函数的概念和性质.

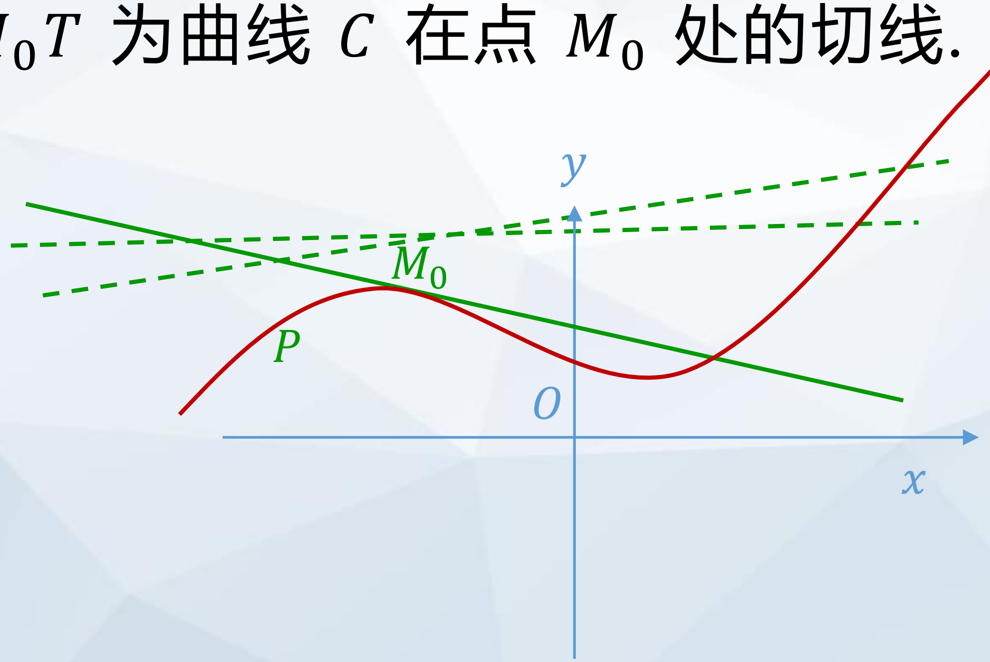
- 例 光的反射定律告诉我们, 如果光射在一个平面上, 那么反射的光线、入射的光线、以及与平面交点的法线三者在同一个平面，且反射的光线和入射的光线与法线的夹角相同. 其中法线是指与平面垂直的直线.
- 如果光线不是射在一个平面上而是一个曲面上呢?
- 我们只考虑入射光线和该点法线所形成的平面, 问题化归成了研究二维平面上曲线的切线和法线, 这二者相互垂直, 因此斜率之积为 -1.



- 圆的切线定义成与圆只有一个交点的直线，但对于一般的曲线，显然不能如此定义.
- 例如右图中抛物线 $y = x^2$ 在 $(1,1)$ 处就有两条直线与该抛物线只有一个交点，而根据我们的直观，应当是 $y = 2x - 1$ 作为切线而非 $x = 1$.



- 而像下图中的直线与曲线有多个交点却是它的切线.
- 定义 设在平面直角坐标系中，有一条曲线 $C: y = f(x)$ 以及 C 上的一点 $M_0(x_0, y_0)$. 在 C 上另取一点 $P(x, y)$ 做割线 M_0P.
- 当点 P 沿着 C 无限趋向于点 M_0 时，如果割线 M_0P 无限趋向于极限位置 M_0T，就称直线 M_0T 为曲线 C 在点 M_0 处的切线.



- 由于直线 M_0P, M_0T 经过点 M_0, 因此我们只需要考虑它的斜率. 而点 P 沿着 C 无限趋向于点 M_0 的过程即 $x \to x_0$.
- 由于割线 M_0P 的斜率为

$$k_{M_0P} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- 因此 M_0T 的斜率为

$$k_{M_0T} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- 于是我们便可求得曲线 C 在点 M_0 处的切线.

- 例 设一物体在做直线运动, 位置函数为 $s = s(t)$, 其中 t 为时间. 那么在时间 $t = t_0$ 附近我们取很小一段 $(t_0, t_0 + \Delta t)$, 然后计算 $\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ 便是该物体在时间 $(t_0, t_0 + \Delta t)$ 内的平均速度, 而当 $\Delta t \to 0$, 即 $t \to t_0$ 时, 平均速度的极限就是瞬时速度

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- 这个例子在我们引入积分以及说明牛顿-莱布尼兹定理的时候还会用到.

- 从上述例子中可以看出 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 这种极限形式的重要地位.
- 如果我们用增量来表示: $\Delta y = f(x) - f(x_0), \Delta x = x - x_0$, 那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

- 它反映了 f 在 x_0 处随自变量变化而变化的快慢. 由此产生了导数的概念.
- 定义 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的在某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义. 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 则称 f 在 x_0 处可导或有导数, 并称该极限为 f 在 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$. 这里 $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 都是等价写法.

- 换言之,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

- 如果该极限不存在, 则称 f 在 x_0 处不可导或没有导数.
- 第一种形式常常用在研究抽象函数性质与导函数关系时, 而第三种形式则常常用在计算具体函数的导数, 此时该极限是 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 我们可以利用等价无穷小来计算.
- 第二种形式则表明了导数和微分的关系, 这种关系我们会在后面再介绍.

- 由导数定义知, 如果函数 f 在 x_0 处可导, 则曲线 $C: y = f(x)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处切线 M_0T 的斜率 $k_{M_0T} = f'(x_0)$, 因此切线 M_0T 的方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

- 相应的法线斜率为 $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$ ($f'(x_0) = 0$ 时则为竖直直线), 方程为

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

- 当 $f'(x_0) = \infty$ 时, 切线为竖直直线,

切线方程为 $x = x_0$, 法线方程为 $y = y_0$.

- 例 从正上方竖直向下的光线经过曲线 $y=\frac{x^2}{4a}$ 反射后一定经过它的焦点 $(0,a)$.
- 证明 设光线方程为 $x=x_0$. 则反射点为 $\left(x_0,\frac{x_0^2}{4a}\right)$. 由于

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{4a\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0+\Delta x}{4a}=\frac{x_0}{2a},$$

- 因此该点的切线斜率 $\tan n=-\frac{2a}{x_0}$, 反射光线的斜率为

$$\tan\left(2n-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\tan^2 n-1}{2\tan n}=\frac{x_0^2-4a^2}{4ax_0}.$$

- 因此反射光线的方程为 $y=\frac{x_0^2-4a^2}{4ax_0}(x-x_0)+y_0$, 它总经过 (x_0,y_0).

- 由此可知，凹面镜的表面是旋转抛物面.
- 对于凸透镜，我们也可以类似地运用折射定律来研究它的曲面方程，它的表面也是旋转抛物面. 不过在精度需要不高时，往往用更容易加工的球面镜来代替.
- 例 设一物体在做直线运动，位置函数为 $s=2t^2+5t$，其中 t 为时间. 那么在时间 t_0 时它的瞬时速度是

$$s'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2(t_0+\Delta t)^2+5(t_0+\Delta t)-2t_0^2-5t_0}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}(4t_0+5+2\Delta t)=4t_0+5.$$

- 和极限以及连续性类似, 我们也可以定义单侧导数.
- 定义 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在(这意味着 $f(x)$ 在某个 $(x_0-\delta,x_0)$ 上有定义), 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左可导, 其极限值称为 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左导数, 记作 $f_-'(x_0)$, 即 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- 定义 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在(这意味着 $f(x)$ 在某个 $(x_0,x_0+\delta)$ 上有定义), 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右可导, 其极限值称为 $y=f(x)$ 在点 x_0 的右导数, 记作 $f_+'(x_0)$, 即 $f_+'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- 如果函数在 x_0 处左右均可导, 那么能推出在 x_0 处可导吗?

- **定理** 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处既左可导又右可导，且 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.
- 这由极限的存在性直接推出. 和连续性类似，该定理常用于讨论分段函数分点处的可导性.
- 当函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导时，$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.
- 和连续性类似，我们可以研究函数在区间上的可导性.
- **定义** 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一个点都可导，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，或称 $y=f(x)$ 是 (a,b) 上的可导函数.
- 如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且在 a 处左可导，在 b 处右可导，则称 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，或称 $y=f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可导函数.
- 类似地，我们可以定义在半开半闭区间上的可导性.

- 如果函数 $y=f(x)$ 在一段区间内(上)可导, 则在每一点 x 的导数会随着 x 的不同而变化, 其导数值仍然是 x 的函数, 称为函数 $y=f(x)$ 在该区间内(上)的导函数, 简称为函数的导数, 记作 $f'(x), y', \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, 即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- 并有 $f'(x)|_{x=x_0}=f'(x_0)$.
- 由此可知左右导数不能写成 $f'(x_0^-)$ 和 $f'(x_0^+)$, 因为这种写法表示的是导函数在 x_0 的左右极限.

- 例 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, 则

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

- 后续我们会看到 $x\neq 0$ 时, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$.
- 于是 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在, 即导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.
- 所以可导函数的导函数不一定连续.

- 例 求 $f(x) = ax + b$ 的导数, 其中 a, b 均为常数.
- 解 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{[a(x+\Delta x)+b]-[ax+b]}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} a = a.$
- 即 $(ax + b)' = a.$
- 特别地, 若 $a = 0$, 则 $b' = 0$, 即常数的导数等于 0.
- 这说明了 $f'(x_0) \neq [f(x_0)]'$, 因此我们不可以将导数写成后一种形式.
- 若 $a = 1, b = 0$, 则 $x' = 1$.

- 例 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\cos x_0$, 因此 $(\sin x)'|_{x=x_0}=\cos x_0$, 即

$$(\sin x)'=\cos x\,.$$

- 同理, $(\cos x)'=-\sin x$.
- 例 求 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}$

$$=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\ln a}{\Delta x}(\text{等价无穷小替换})=a^x\ln a\,.$$

- 即 $(a^x)'=a^x\ln a$.
- 特别地, 若 $a=e$, 则 $(e^x)'=e^x$.

- **例** 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 0; \\ x+1, & x>0. \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 0 处的可导性, 若可导, 求出 $f'(0)$, 并求 $f'(x)$.
- **解** 由于

$$f'_-(0)=(e^x)'\Big|_{x=0}=e^x\Big|_{x=0}=1, \qquad f'_+(0)=(x+1)'\Big|_{x=0}=1.$$

- 因此 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$. 由定理3.1.1可知, 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=1$.
- 当 $x<0$ 时, $f(x)=e^x$, $f'(x)=(e^x)'=e^x$.
- 当 $x>0$ 时, $f(x)=x+1$, $f'(x)=(x+1)'=1$.

- 故 $f'(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0; \\ 1, & x>0. \end{cases}$
- 一般地, 如果 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\le x_0; \\ f_2(x), & x>x_0 \end{cases}$ 且 $f_1(x)$ 在 $(-\infty,x_0]$ 上可导,

  $f_2(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上可导, 是否有 $f'(x)=\begin{cases} f_1'(x), & x\le x_0; \\ f_2'(x), & x>x_0 \end{cases}$?
- 答案是否定的. 这是因为 $f_{1,-}'(x_0)$ 未必等于 $f_{2,+}'(x_0)$.

- **结论** 设 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\le x_0; \\ f_2(x), & x>x_0 \end{cases}$ 且 $f_1(x)$ 在 $(-\infty,x_0]$ 上可导, $f_2(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上可导.
- 如果 $f(x_0^-)=f_1(x_0)\ne f(x_0^+)=f_2(x_0)$, 则 f 在 x_0 处不连续, 自然不可导.
- 如果 $f_1(x_0)=f_2(x_0), f'_{1,-}(x_0)\ne f'_{2,+}(x_0)$, 则 $f'(x_0)$ 不存在.
- 如果 $f_1(x_0)=f_2(x_0), f'_{1,-}(x_0)=f'_{2,+}(x_0)$, 则

$$f'(x)=\begin{cases} f_1'(x), & x<x_0; \\ f'(x), & x=x_0; \\ f_2'(x), & x>x_0 \end{cases}=\begin{cases} f_1'(x), & x\le x_0; \\ f_2'(x), & x>x_0. \end{cases}$$

- 例 若 $f'_+(x_0) > 0$, 证明 $\exists\delta > 0$ 使得当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时, 有 $f(x) > f(x_0)$.

- 证明 由于 $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$, 根据极限的保号性, $\exists\delta > 0$ 使得当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时, 有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. 由于 $x - x_0 > 0$, 因此 $f(x) > f(x_0)$.

- 注 这里 $>$ 不能换成 $\geq$, 例如 $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

- 类似地，我们有
- $f'_+(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) > f(x_0).$
- $f'_+(x_0) < 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) < f(x_0).$
- $f'_-(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0-\delta, x_0), f(x) < f(x_0).$
- $f'_-(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0-\delta, x_0), f(x) > f(x_0).$
- $\exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f'_+(x_0) \geq 0.$
- $\exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$
- $\exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$
- $\exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f'_+(x_0) \geq 0.$

- 例 如果函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=(\quad)$.
- (A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0
- 分析 我们在极限 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 中将 x 换成 x^3，则

$$f'(0)=\lim_{x^3\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}.$$

- 解 由题设可知，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=f'(0).$$

- 因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$，选 B.

- 函数的可导性与连续性的关系
- 定理 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.
- 证明 由于函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，因此 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在.
- 从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$
- 因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.
- 定理(逆否命题) 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

- 注意，如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续，则函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处未必可导，即

可导一定连续，连续不一定可导.

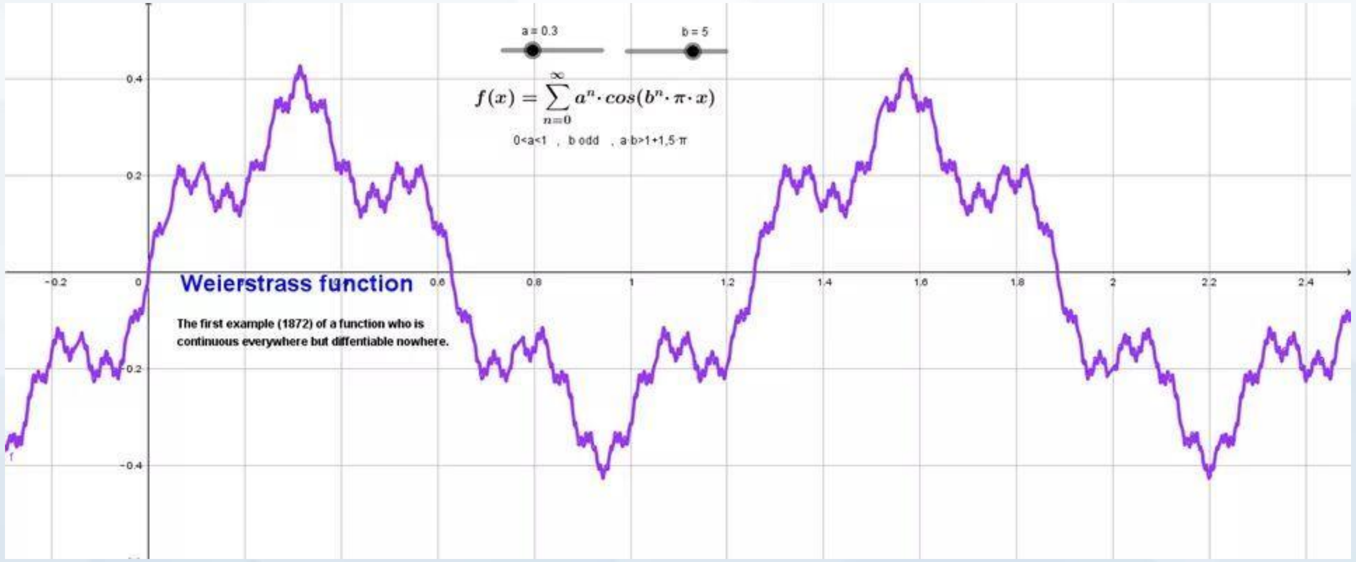
- 例 讨论 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处的连续性和可导性.
- 解 我们已经知道 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处连续.
- 由于 $\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \Delta x < 0; \\ 1, & \Delta x > 0, \end{cases}$ 因此

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 1, \qquad f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = -1.$$

- 由于 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$，因此 $f(x) = |x|$ 在点 0 处不可导.

- 不仅如此, 魏尔斯特拉斯构造了一个处处连续却处处不可导的函数.
- 例 魏尔斯特拉斯函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \qquad 0<a<1, ab>1+1.5\pi, b \text{ 是奇数.}$$



- 例 设函数 $f(x)=\begin{cases}3^{-x}, & x<1;\\ ax+b, & x\geq 1,\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导, 求 a,b 的值以及 $f'(1)$.
- 分析 记 $f_1(x)=ax+b, f_2(x)=3^{-x}$.
- 当 $x\geq 1$ 时, $f(x)=f_1(x)$, 因此

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f_1(x)-f_1(1)}{x-1}=f'_{1,+}(1)=f'_1(1).$$

- 由于可导推出连续, 因此 $f(1)=f(1^-)=f_2(1^-)=f_2(1)$.
- 当 $x\leq 1$ 时, $f(x)=f_2(x)$, 因此 $f'_-(1)=f'_{2,-}(1)=f'_2(1)$.

- 解 我们知道, 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 因此

$$f(1^+)=f(1^-)=f(1), \qquad a+b=\frac{1}{3}.$$

- 又由于

$$f'_+(1)=(ax+b)'\Big|_{x=1}=a,$$

$$f'_-(1)=(3^{-x})'\Big|_{x=1}=\left[3^{-x}\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right]\Big|_{x=1}=-\frac{1}{3}\ln 3,$$

- 因此 $a=-\frac{1}{3}\ln 3$, $b=\frac{1+\ln 3}{3}$, $f'(1)=-\frac{1}{3}\ln 3$.

- 例 求曲线 $y=\cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.
- 解 由于 $f'(x)=-\sin x$, 因此切线斜率为 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 切线方程为

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2},\qquad 3x+2\sqrt{3}y=\pi+\sqrt{3}.$$

- 法线方程为

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2},\qquad 12x-6\sqrt{3}y=4\pi-3\sqrt{3}.$$

- 例 设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续, 则下列命题错误的是(　　).
- (A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$;
- (B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$;
- (C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在;
- (D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

- 解 (A) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0} x=0$
- (B) $2f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)+\lim\limits_{x\to 0} f(-x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0} x=0$
- (C) 由于 $f(0)=0$, 因此 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.
- (D) 例如 $f(x)=|x|$. 不过, 如果 $f'(0)$ 存在, 可以知道
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}\right]=2f'(0).$
- 此时, 我们可以推出 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-f(-x)]=0$, 但这没有用, 因为左边等于 $f(0)-f(0)=0$.
- 想一想, 如果是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(-3x)}{x}$ 呢?

- 例 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=(\quad)$.
- (A) $f'(a)$ (B) $2f'(a)$ (C) 0 (D) $f'(2a)$
- 解 由于 $f'(a)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}$，因此

$$f'(a)=\lim_{-x\to 0}\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(a-x)-f(a)}{x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[f(a+x)-f(a)]-[f(a-x)-f(a)]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(a-x)-f(a)}{x}$$

- 我们也可以代入一个例子来进行判断，例如令 $f(x)=x$ 则可立知选 B.

- 变化率问题实例
- 导数实质上是函数 y 关于自变量 x 的变化率. 例如速度是路程 s 关于时间 t 的变化率.
- 下面我们将给出其它的关于变化率应用实例, 其目的在于使大家对导数有更深刻的认识.
- 另一方面也启示大家, 人们之所以研究这种形式的极限, 就在于数学就是把实际问题中最具有共性的东西提炼出来, 加以研究再应用于具体问题中去.

- **例** 设细棒位于区间 $[a,b]$ 上, 从点 a 到点 x 的一段细棒的质量是 x 的函数 $m=m(x)\ (a\le x\le b)$, 求细棒的线密度 $\rho(x)$.
- **解** 区间 $[x,x+\Delta x]\ (\Delta x>0, x, x+\Delta x\in[a,b])$ 上细棒的质量为 $\Delta m=m(x+\Delta x)-m(x)$, 其平均线密度为

$$\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}.$$

- 令 $\Delta x\to 0$, 于是棒在 x 处的线密度为 $\rho(x)=m'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}$.
- 它是质量对长度的变化率.

- 例 在热学中，一个有趣的问题是可压缩性.
- 某一气体在温度一定时，其体积 V 依赖于压力 P，可以考虑体积随压力的变化率. 人们定义

$$\beta=-\frac{1}{V}\cdot\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}$$

- 为等温压缩率，它反映了在温度一定时，单位体积的气体的体积随着压力的增大而体积减小的快慢.
- 例 经济学中的边际量. 当某经济量 $y=y(x)$ 的自变量 x 增加一个单位时，经济量的改变量称为该经济量的边际量.
- 例如边际成本、边际收益、边际利润等. 同样的道理，经济量的边际量为

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}.$$

- 例 设 $n = f(t)$ 是在时刻 t 某一生物或植物的数目.
- 我们考虑它的增长率. 在 t 到 $t + \Delta t$ 的平均增长率为

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

- 令 $\Delta t \to 0$,

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

- 便是该物种 t 时刻的增长率.

3.2 求导的运算法则

- 求导的四则运算法则
- 和极限、连续性类似，函数的四则运算也可以继承可导性.
- 定理 设函数 $u(x), v(x)$ 均在点 x 处可导，则
- (1) 函数 $f(x)=u(x)\pm v(x)$ 在点 x 处可导，且 $f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$.
- (2) 函数 $f(x)=u(x)v(x)$ 在点 x 处可导，且

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

- (3) 函数 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ $(v(x)\neq 0)$ 在点 x 处可导，且

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

- **证明** (1) 由于

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= [u(x+\Delta x) - u(x)] \pm [v(x+\Delta x) - v(x)] \\ &= \Delta u \pm \Delta v,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \\ &= u'(x) \pm v'(x).\end{aligned}$$

- (2) 由于

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x)\\ &= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)\\ &= [u(x+\Delta x) - u(x)]\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot[v(x+\Delta x) - v(x)]\\ &= \Delta u\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\Delta v\end{aligned}$$

- 因此

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\Delta v}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\left[u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]\\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x).\end{aligned}$$

- (3) 设 $g(x) = \frac{1}{v(x)}$. 由于

$$\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x)$$
$$= -\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{v(x)v(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta v}{v(x)v(x + \Delta x)},$$

- 因此

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \frac{1}{v(x)v(x + \Delta x)} = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

- 由(2)可知

$$f'(x) = u'(x)g(x) + u(x)g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

- **推论** 设函数 $u(x), v(x)$ 均在点 x 处可导, 则
- (1) $(Cu)'(x) = Cu'(x)$. (因为 $C' = 0$)
- (2) $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.
- 求导法则可以简记为

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (Cu)'(x) = Cu' \quad \text{(线性)}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{(莱布尼兹法则)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

- 自然地, 对于有限个 $u_1, \dots, u_n$,

$$(C_1u_1 + C_2u_2 \cdots + C_nu_n)' = C_1u_1' + C_2u_2' \cdots + C_nu_n' = \sum_{i=1}^{n} C_iu_i',$$

$$(u_1u_2\cdots u_n)' = u_1'u_2\cdots u_n + u_1u_2'\cdots u_n + \cdots + u_1u_2\cdots u_n'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_1 \dots u_i' \dots u_n,$$

- 例如

$$(u + 2v - w)' = u' + 2v' - w',$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

- 例 $(x^2)' = 2x.$
- 证明 由函数乘法的求导法则(莱布尼兹法则)可知
- $(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = x + x = 2x.$
- 一般地, 对任意正整数 n, $(x^n)' = nx^{n-1}$. 我们后面会看到, n 取任意实数时它也成立.
- 例 求函数 $f(x) = 2x^n - \mathrm{e}^x + \sin x + \cos\frac{\pi}{4}$ 的导数.
- 解
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x^n)' - (\mathrm{e}^x)' + (\sin x)' + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)' \\ &= 2nx^{n-1} - \mathrm{e}^x + \cos x. \end{aligned}$$
- 这里注意不要误写为 $\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)' = -\sin\frac{\pi}{4}$.

- 例 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)$ 的导数.
- 解 $$f'(x)=(\mathrm{e}^x)'\cdot(\sin x-\cos x)+\mathrm{e}^x\cdot(\sin x-\cos x)'$$ $$=\mathrm{e}^x\cdot(\sin x-\cos x)+\mathrm{e}^x\cdot(\cos x+\sin x)$$ $$=2\mathrm{e}^x\sin x\,.$$
- 例 求函数 $f(x)=\cos 2x$ 的导数.
- 解 由于 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$, 因此

$$f'(x)=(\cos x+\sin x)'\cdot(\cos x-\sin x)+(\cos x+\sin x)\cdot(\cos x-\sin x)'$$
$$=(-\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)+(\cos x+\sin x)\cdot(-\sin x-\cos x)$$
$$=(1-2\sin x\cos x)+(-1-2\sin x\cos x)=-2\sin 2x\,.$$

- 例 求函数 $f(x)=\tan x$ 的导数.

- 解 $f'(x)=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

- 同理 $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$

- 例 求函数 $f(x) = \sec x$ 的导数.

- 解

$$f'(x) = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$= -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x .$$

- 同理 $(\csc x)' = -\cot x \csc x .$

- 反函数的求导法则

- **定理** 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 局部单调连续, 且在 x_0 处可导, $f'(x_0)\neq 0$, 则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导, 且

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}\quad \left(\text{即 } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}\right)$$

- **注** 从几何直观上看, φ 的图像是 f 的图像沿着 $y=x$ 翻转得到, 因此 φ 在 (x_0,y_0) 处的切线翻转过去就是 f 在 (y_0,x_0) 处的切线, 二者的斜率之积为 1, 即 $\varphi'(y_0)\cdot f'(x_0)=1$.

- **证明** 设 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x) - f(x_0)$. 由于 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续，因此 $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$.
- 由于 $y = f(x)$ 在 x_0 局部单调连续，因此其反函数 $x = \varphi(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 局部连续，从而 $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$. 所以

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

- 换言之，

$$\text{反函数的导数} = \frac{1}{\text{函数的导数}}.$$

- 如果 $f'(x_0) = 0$, 则 $\varphi'(y_0) = \infty$.

- 例 求函数 $f(x)=\arcsin x\ (-1<x<1)$ 的导数.
- 注意这里是反函数在 y_0 处取导数, 而原本的函数时在 x_0 处取导数. 因此

$$(\sin x)'=\cos x \Rightarrow (\arcsin x)'=\frac{1}{\cos x}$$

- 是错误的. 为避免错误, 我们可用 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 的语言.
- 解 由于 $\frac{\mathrm{d}(\sin y)}{\mathrm{d}y}=\cos y$, 因此 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(\arcsin x)}=\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, 即

$$(\arcsin x)'=\frac{\mathrm{d}(\arcsin x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1).$$

- 这里注意当 $x=\pm1$ 时导数不存在, 实际上 $f'_+(-1)=\infty, f'_-(1)=\infty$.

- 例 求函数 $f(x) = \arctan x$ 的导数.

- 解 由于 $\dfrac{\mathrm{d}(\tan y)}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{\cos^2 y}$, 因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(\arctan x)} = \frac{1}{\cos^2(\arctan x)} = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2,$$

- 即

$$(\arctan x)' = \frac{\mathrm{d}(\arctan x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- 由于

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, (-1 \le x \le 1)$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2},$$

- 因此

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1), \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

- 例 求函数 $f(x)=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$ 的导数.
- 解 我们知道 $y=\log_a x$ 是单调可导函数 $x=a^y$ 的反函数.
- 由于 $\frac{\mathrm{d}a^y}{\mathrm{d}y}=a^y\ln a$, 因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(\log_a x)}=a^{\log_a x}\ln a=x\ln a,$$

- 即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

- 特别地, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

- 复合函数的求导法则
- **定理** 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处可导, 函数 $y=f(u)$ 在点 $\varphi(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处可导, 且

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=f'[\varphi(x_0)]\cdot\varphi'(x_0)\quad\left(\text{即 }\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)$$

- **证明** 设

$$\Delta x=x-x_0,\qquad \Delta u=\varphi(x)-\varphi(x_0),\qquad \Delta y=f[\varphi(x)]-f[\varphi(x_0)].$$

- 由于函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续, 函数 $y=f(u)$ 在点 $\varphi(x_0)$ 处连续, 因此

$$\Delta x\to 0\Rightarrow\Delta u\to 0\Rightarrow\Delta y\to 0.$$

- 故

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$=f'[\varphi(x_0)]\cdot\varphi'(x_0).$$

- 换言之,

复合函数的导数 = 外函数的导数 × 内函数的导数.

- 复合函数的求导法则也被称为链式法则，它可以推广到多重复合函数的情形，例如 $y=f(u), u=\varphi(v), v=\psi(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

- 复合函数求导的关键在于复合函数的分解.
- 例 求函数 $f(x)=\sin\left(1-2x^2\right)$ 的导数.
- 解 $f(x)=(\sin x)'\cdot\left(1-x^2\right)'=-2x\cos x$.
- 这种解法是错误的，因为一般 $(f\circ\varphi)'(x)\neq f'(x)\cdot\varphi'(x)$.

- **解** 令 $u(x)=1-2x^2$, 则 $y=\sin u$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\cos u$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-2\cdot 2x=-4x$, 再由链式法则得到

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos\left(1-2x^2\right)\cdot(-4x)=-4x\cos\left(1-2x^2\right).$$

- **注** 我们在计算时, 可以先把内层的函数看成一个整体的变量来处理, 这样就不容易出错了.
- **例** 求函数 $f(x)=\ln(2+\sin x)$ 的导数.
- **解** $f'(x)=\frac{1}{2+\sin x}\cdot(2+\sin x)'=\frac{1}{2+\sin x}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{2+\sin x}$.

- 例 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}\cdot(2x)=2x\mathrm{e}^{x^2+1}$.
- 例 求函数 $f(x)=2^{\arctan(x^2+1)}$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\ln 2\cdot 2^{\arctan(x^2+1)}\cdot\dfrac{1}{1+(x^2+1)^2}\cdot 2x=\dfrac{x2^{\arctan(x^2+1)+1}\ln 2}{1+(x^2+1)^2}$.
- 例 求函数 $f(x)=\ln[\cos(\mathrm{e}^x)]$ 的导数.
- 分析 这是一个三重复合函数.
- 解 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}\cdot[-\sin(\mathrm{e}^x)]\cdot\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x)$.

- 可导函数的奇偶性和周期性
- **定理** (1) 若奇函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 $-x_0$ 处可导, 且 $f'(-x_0)=f'(x_0)$, $f'(x)$ 是偶函数.
- (2) 若偶函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 $-x_0$ 处可导, 且 $f'(-x_0)=-f'(x_0)$, $f'(x)$ 是奇函数.
- **证明** (1)

$$
\begin{aligned}
f'(-x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x_0+\Delta x)-f(-x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).
\end{aligned}
$$

- (2) 类似可证.
- **定理** 若周期为 T 的函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 x_0+T 处可导, 且 $f'(x_0+T)=f'(x_0)$, $f'(x)$ 是周期为 T 的函数.
- **证明**

$$f'(x_0+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+T+\Delta x)-f(x_0+T)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=f'(x_0).$$

- 注意该命题的逆命题不成立, 例如 $f(x)=x+\sin x$, $f'(x)=1+\cos x$.

- 例 求函数 $f(x)=x^{\mu}$ 的导数.
- 解 我们先考虑 $x>0$ 情形. 由于 $f(x)=\mathrm{e}^{\mu\ln x}$, 因此

$$f'(x)=\mathrm{e}^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)'=x^{\mu}\cdot\frac{\mu}{x}=\mu x^{\mu-1},\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\mu}{x}.$$

- 当 $\mu=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ 时, 若 p,q 均为奇数, 则 $f(x)$ 为奇函数, $f'(x)$ 是偶函数. 若 p 为偶数, q 为奇数, 则 $f(x)$ 为偶函数, $f'(x)$ 为奇函数. 因此此时对于 $x>0$,

$$\frac{f'(-x)}{f(-x)}=-\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{\mu}{x}=\frac{\mu}{-x},\qquad f'(-x)=\mu(-x)^{\mu-1}.$$

- 故 $x\neq 0$ 时, 总有 $f'(x)=\mu x^{\mu-1}$.

- 不难看出，若 $\mu > 1$，则 $f'(0) = 0$；若 $\mu = 1$，则 $f'(0) = 1$；若 $0 < \mu < 1$，则 $f'(0)$ 不存在.
- 综上所述，$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$ 对任意 $\mu \in \mathbb{R}$ 以及任意属于该函数定义域开区间内的 x 成立.
- 设 $y = u^m v^n$，则 $y = \mathrm{e}^{m\ln u + n\ln v}$. 于是由链式法则，

$$y' = \mathrm{e}^{m\ln u+n\ln v}(m\ln u + n\ln v)' = u^m v^n\left(m\frac{u'}{u} + n\frac{v'}{v}\right).$$

- 当 $m = n = 1$ 时，我们得到莱布尼兹法则 $(uv)' = uv\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right) = u'v + uv'$.
- 当 $m = 1, n = -1$ 时，我们得到 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u}{v}\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. 这种对数技巧我们之后还会遇到.

- 例 求函数 $f(x)=\ln|x|\ (x\neq 0)$ 的导数.
- 解 当 $x>0$ 时，$f'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.
- 当 $x<0$ 时，$f'(x)=[\ln(-x)]'=\dfrac{1}{-x}\cdot(-x)'=\dfrac{1}{x}$. 也可由偶函数性质得到.
- 所以 $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$.
- 例 求函数 $f(x)=\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\dfrac{(e^x)'-(e^{-x})'}{2}=\dfrac{e^x-e^{-x}\cdot(-x)'}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch} x$.
- 同理 $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x,\ (\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

- 我们发现它们和三角函数的导函数形式相似. 在引入复数后, 我们发现 $\operatorname{sh} x = -i\sin ix$, 于是 $(\operatorname{sh} x)' = -i\cdot i\cdot\cos ix = \cos ix = \operatorname{ch} x$. 因此二者本质上确实是一回事.

- 例 求函数 $f(x) = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ 的导数.

- 解 由于 $\dfrac{\mathrm{d}(\operatorname{sh} y)}{\mathrm{d}y} = \operatorname{ch} y = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}$, 因此

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}(\operatorname{arsh} x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- 我们也可以直接计算

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left[1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(1+x^2\right)'\right] \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},
\end{aligned}
$$

- 这里 $\left(\sqrt{x^2+C}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+C}}$ 也是常见结论. 同理

$$
(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.
$$

- 基本导数公式
- $(C)' = 0$
- $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
- $(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a}$, $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- 记忆技巧 这里，三角函数的正换成余，导函数的余换成正，且符号变成负的.

- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
- $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
- $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
- $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$
- 求导法则

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (Cu)' = Cu'$$

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$(f \circ \varphi)'(x) = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}.$$

- 现在我们可以自信地说，任何一个初等函数的导函数我们都可以计算出了，因为初等函数无非就是基本初等函数通过四则运算和复合得到的.
- 例 求函数 $f(x)=x^2\sin \mathrm{e}^x$ 的导数.
- 解 $$f'(x)=2x\sin\mathrm{e}^x+x^2\cdot(\sin\mathrm{e}^x)'$$
$$=2x\sin\mathrm{e}^x+x^2\cdot\cos\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x=2x\sin\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x\cos\mathrm{e}^x.$$
- 例 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln\cos x^2}$ 的导数.
- 解 $$f'(x)=-\frac{(\ln\cos x^2)'}{(\ln\cos x^2)^2}=-\frac{1}{(\ln\cos x^2)^2}\cdot\frac{1}{\cos x^2}\cdot(-\sin x^2)\cdot(2x)$$
$$=-\frac{2x\sin x^2}{\cos x^2\ (\ln\cos x^2)^2}.$$

- 例 求函数 $f(x) = x\arctan(x^2)$ 的导数.
- 解

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan(x^2) + x \cdot [\arctan(x^2)]' \\ &= \arctan(x^2) + x \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot (x^2)' \\ &= \arctan(x^2) + \frac{2x^2}{1+x^4}. \end{aligned}$$

- 例 求函数 $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ 的导数以及 $f'(1)$.

- 解 由于 $f(x)=-1+\frac{2}{1+\sqrt{x}}$, 因此

$$f'(x)=\left[\frac{2}{1+\sqrt{x}}\right]'=-\frac{2}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2},$$

$$f'(1)=-\frac{1}{4}.$$

3.3 高阶导数

- 沿直线运动的物体的速度 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的变化率, 即 $v(t) = s'(t)$. 而加速度 $a(t)$ 是速度 $v(t)$ 对时间 t 的变化率, 即这种导数称为 $s(t)$ 对 t 的二阶导数.
- 例 一物体沿单位圆逆时针匀速运动, 其位置函数为 $(s_1, s_2) = (\cos t, \sin t)$, 则速度为 $(v_1, v_2) = (-\sin t, \cos t)$, 加速度为 $(a_1, a_2) = (-\cos t, -\sin t)$, 因此该物体受力 $F = ma = (-m\cos t, -m\sin t)$, 该力为指向圆心的大小固定的力, 被称为向心力.
- 对导函数再讨论其可导性或再求导数, 甚至可以对导函数的导函数继续讨论下去, 则就是本节所要介绍的高阶导数.

- 定义 如果函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在点 x 处可导，就称 $y=f(x)$ 在 x 处二阶可导. $f'(x)$ 在点 x 处的导数称为函数 $y=f(x)$ 在 x 点处的二阶导数，记作 $f''(x), y'', \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$f''(x)=[f'(x)]' \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

- 此处的分母表示 $(\mathrm{d}x)^2$，即 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 y$.
- 极限形式为 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$.
- 类似地，我们可以定义三阶导数 $f'''(x), y''', \dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$，四阶导数 $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4}$ 等等.

- 一般地, $y=f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数的导数称为 $f(x)$的 n 阶导数, 记作 $f^{(n)}(x), y^{(n)}, \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, 即

$$f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]' \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

- 二阶及二阶以上的导数称为高阶导数, $f'(x)$ 称为一阶导数. 有时候为了方便也称 $f(x)$ 为零阶导数, 即 $f^0(x)=f(x)$.
- 注意, 低阶导数存在不能推出更高阶的导数存在.
- 例如 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$ 在 $x=0$ 处可导, 但导函数 $f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 处不可导, 即 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$ 在 $x=0$ 处不是二阶可导的. 实际上 $x^{n+\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导但不是 $(n+1)$ 阶可导.

- 一般函数的高阶导数难以求得，我们本节主要介绍三种情形的高阶导数.
- (1) 多项式/幂函数/对数函数
- 例 求 $y = 2x^3 - x^2 + 5x + 1$ 的各阶导数.
- 解 $y' = 6x^2 - 2x + 5, y'' = 12x - 2, y''' = 12.$
- 当 $n \geq 4$ 时，$y^{(n)} = 0.$
- 从这个例子中可以看出，多项式函数任意阶可导，且每次求导后仍然为多项式，次数降低一次直至为 0.
- 一般地，若 $y = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0\ (a_m \neq 0)$，则

$$y^{(n)} = \begin{cases} a_m m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} + \cdots + a_n n!, & n < m, \\ a_m m!, & n = m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

- 例 求 $y = x^{\mu}$ (μ 为常数)的各阶导数.
- 解 $y' = \mu x^{\mu-1}$, $y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, ...
- 一般地, $y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}, n = 0,1,2,\ldots$
- 如果 μ 是正整数则情形同多项式, 上式亦成立.
- 特别地, 我们有 $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, n = 0,1,2,\ldots$
- 结论 $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$. 如果 $F'(x) = f(x)$, 则 $F^{(n)} = f^{(n-1)}$.
- $[f(x+C)]^{(n)} = f^{(n)}(x+C)$, $f(\lambda x)^{(n)} = \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$.

- 由此可知

$$\left[\frac{1}{(x+C)^2}\right]^{(n)} = -\left(\frac{1}{x+C}\right)^{(n+1)} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{(x+C)^{n+2}},$$

$$[\ln|x+C|]^{(n)} = \left(\frac{1}{x+C}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+C)^n}.$$

- 这意味着特别地,

$$[\ln(C+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+C)^n}, \qquad [\ln(C-x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x-C)^n}.$$

- 求一个函数的 n 阶导数时，可以先求一阶导数、二阶导数、三阶导数，根据其中的规律，归纳得到函数的 n 阶导数. 这种求函数 n 阶导数的方法我们称为直接法.

- 利用直接法可以求一些简单函数的高阶导数. 对于复杂的函数，用直接法很难求出 n 阶导数. 下面介绍间接法，为此先介绍高阶导数的运算法则.

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}, \qquad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad \text{(莱布尼兹公式)}.$$

- 特别地，

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + 2uv'', \qquad (uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + v'''.$$

- 利用高阶导数运算法则，以及常用高阶导数公式，通过适当的函数变形求出函数 n 阶导数的方法称为间接法.
- 例 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$________.
- 解 由于 $y=\ln 2+\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)=\ln 2+\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|$，因此

$$y^{(n)}=\left[\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|\right]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n}},$$

$$y^{(n)}(0)=-2^{n}(n-1)!.$$

- 例 设 $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 则 $y^{(99)}(0)=$________.

- 解 由于 $y=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]=\frac{1}{2}[\ln|x-1|-\ln|x+1|]$, 因此

$$y^{(99)}=\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^{100}98!}{(x-1)^{99}}-\frac{(-1)^{100}98!}{(x+1)^{99}}\right]$$

$$=\frac{98!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{99}}-\frac{1}{(x+1)^{99}}\right],$$

$$y^{(99)}(0)=-98!.$$

- 例 求 $y=\frac{x}{1-x^2}$ 的各阶导数.
- 解 由于 $y=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$, 因此

$$y^{(n)}=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

- 例 求 $y=\frac{1}{x^2-1}$ 的各阶导数.
- 解 由于 $y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$, 因此

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

- 对于一般的有理函数，我们是不是可以类似地求得任意阶导数呢？
- 实际上是可以的，但一般的情形过于复杂，我们只考虑 $g(x)$ 可以分解为一些一次多项式的乘积的情形.
- 对于非零多项式 $f(x), g(x)$，存在多项式 $q(x), r(x)$ 使得

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

- 这被称为多项式的带余除法. 如此，有理函数 $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$，其中多项式 $q(x)$ 的各阶导数容易求得，而 $\frac{r(x)}{g(x)}$ 可以表为一些形如 $\frac{a}{(x+b)^k}$ 的有理函数之和，从而可以求得它的导数.

- 例 设 $y=\frac{x^5}{(x-1)^2(x+1)}$. 由于

$$y=x^2+x+2+\frac{2x^2-x-2}{(x-1)^2(x+1)}=x^2+x+2+\frac{1}{4(x+1)}+\frac{7}{4(x-1)}-\frac{1}{2(x-1)^2},$$

因此 $n\geq 3$ 时,

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}+\frac{7}{4}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}+\frac{7}{4}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{4}\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{7(x-1)-2(n+1)}{(x-1)^{n+2}}\right].$$

- 例 设 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, 求 $y^{(n)}$.
- 解

$$y^{(n)}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{2}-n\right)x^{-\frac{1}{2}-n}$$

$$=\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n-1)}{2^n x^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}n!\,x^{n+\frac{1}{2}}}.$$

- 因此我们有 $(\sqrt{x})^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!x^{n-\frac{1}{2}}}$.

- 例 设 $y = \arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$, 其中 $n > 1$.
- 解 由于 $y' = \frac{1}{1+x^2}$, 因此 $(1+x^2)y' = 1$.
- 两边同时对 x 求 $(n-1)$ 阶导数, 则

$$(1+x^2)y^{(n)} + 2(n-1)xy^{(n-1)} + (n-1)(n-2)y^{(n-2)} = 0.$$

- 令 $x = 0$, 则 $y^{(n)} = -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}$.
- 由于 $y(0) = 0, y'(0) = 1$, 因此

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^m (2m)!, & n = 2m+1, \\ 0, & n = 2m, \end{cases} \quad m = 1,2,\ldots$$

- 我们可以归纳求得它的高阶导数. 设 $t = \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - y$, 则

$$y = \frac{\pi}{2} - t, \qquad \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} = -\sin^2 t\,.$$

- 于是

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \sin^2 t\,,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2\sin t\cos t \cdot \left(-\sin^2 t\right) = -\sin 2t \sin^2 t\,,$$

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{dy''}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\left(2\cos 2t \sin^2 t + 2\sin 2t \sin t \cos t\right) \cdot \left(-\sin^2 t\right) \\ &= 2(\cos 2t \sin t + \sin 2t \cos t) \cdot \sin^3 t = 2\sin 3t \sin^3 t\,. \end{aligned}$$

- 我们猜测

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!\sin(nt)\sin^n t\,.$$

- 若上式对 n 成立, 则

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \frac{dy^{(n)}}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \\ &= (-1)^{n+1}(n-1)!\left[n\cos(nt)\sin^n t + \sin(nt)\cdot n\sin^{n-1} t\cos t\right]\cdot\left(-\sin^2 t\right) \\ &= (-1)^{n+2} n!\sin(n+1)t\sin^{n+1} t\,. \end{aligned}$$

- 由归纳法可知

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!\sin(nt)\sin^n t = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!\sin(n\operatorname{arccot} x)}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}.$$

- (2) 指数函数
- 例 求 $y = e^{\lambda x}$ (λ 为常数)的各阶导数.
- 解 $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda f'(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$.
- 归纳可知 $y^{(n)} = \left(e^{\lambda x}\right)^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$. 特别地, $(e^x)^{(n)} = e^x$.
- 例 求 $y = xe^x$ 的各阶导数.
- 解 $y' = x' \cdot e^x + xe^x = (1 + x)e^x$,
- $y'' = (1 + x)' \cdot e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$.
- 归纳可知 $y^{(n)} = (x + n)e^x$.

- **例** 求 $y = x^2 e^{-x}$ 的 10 阶导数.
- **解** 由莱布尼兹公式,

$$y^{(10)} = \left(x^2 e^{-x}\right)^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^{k} \left(x^2\right)^{(k)} \left(e^{-x}\right)^{(n-k)}$$

$$= x^2 \left(e^{-x}\right)^{(10)} + \mathrm{C}_{10}^{1} \cdot 2x \left(e^{-x}\right)^{(9)} + \mathrm{C}_{10}^{2} \cdot 2 \left(e^{-x}\right)^{(8)}$$

$$= x^2 e^{-x} - 20x e^{-x} + 90 e^{-x} = \left(x^2 - 20x + 90\right) e^{-x}.$$

- 一般地, 如果 $P(x)$ 是多项式, $P(x)e^{\lambda x}$ 的各阶导数仍然为 $Q(x)e^{\lambda x}$ 这种形式, 其中 $Q(x)$ 是与 $P(x)$ 同次数的多项式.
- 例如由莱布尼兹公式有

$$\left(xe^{\lambda x}\right)^{(n)} = x\lambda^n e^{\lambda x} + \mathrm{C}_n^1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} = \lambda^n\left(x + \frac{n}{\lambda}\right)e^{\lambda x},$$

$$\left(x^2 e^{\lambda x}\right)^{(n)} = x^2\lambda^n e^{\lambda x} + \mathrm{C}_n^1 \cdot 2x \cdot \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \mathrm{C}_n^2 \cdot 2 \cdot \lambda^{n-2} e^{\lambda x}$$

$$= \lambda^n\left(x^2 + \frac{2n}{\lambda} + \frac{n(n-1)}{\lambda^2}\right)e^{\lambda x}.$$

- (3) 三角函数
- 例 求 $y = \sin\omega x$ (ω 为常数)的各阶导数.
- 解 $y' = \omega\cos\omega x = \omega\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right)$, (奇变偶不变,符号看象限)

$$y'' = \omega^2\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right) = \omega^2\sin\left(\omega x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \omega^3\cos\left(\omega x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \omega^3\sin\left(\omega x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(n)} = \omega^n\sin\left(\omega x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

- 同理 $(\cos\omega x)^{(n)} = \omega^n\cos\left(\omega x + \frac{n\pi}{2}\right), n = 0,1,2,\ldots$

- 例 求 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ 的 10 阶导数.
- 解 由于

$$y=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(1+\cos^2 2x)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4x}{4},$$

- 因此 $y^{(10)}=\frac{1}{4}\cdot 4^{10}\cos\left(4x+10\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-4^9\cos 4x$.

- **另解** 由于 $$y' = 4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x$$ $$= 4\sin x\cos x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)$$ $$= -2\sin 2x\cos 2x = -\sin 4x\,,$$

因此 $y^{(10)} = -(\sin 4x)^{(9)} = -4^9\sin\left(4x + 9\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -4^9\cos 4x\,.$

- **例** 求 $y = \sin x\sin 3x$ 的 20 阶导数.

- **解** 由于 $y = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$, 因此

$$y^{(20)} = \frac{1}{2}\cdot\left[2^{20}\cos\left(2x + 20\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 4^{20}\cos\left(4x + 20\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= 2^{19}\cos 2x - 2^{39}\cos 4x\,.$$

- 一般地，由 $\sin\omega x$ 和 $\cos\omega x$ 构成的多项式，总可以通过积化和差最终化为若干这种形式的三角函数的线性组合.
- 例 求 $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$ 的各阶导数.
- 解 由于

$$y=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 2x)\sin 3x=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 4x+\sin 2x}{2}-\frac{\sin 5x+\sin x}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{4}(-\sin x+\sin 2x+\sin 4x-\sin 5x),$$

- 因此

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\left[-\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+4^n\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-5^n\sin\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

- 对于指数函数和三角函数的乘积, 例如 $y = e^x\cos x$ 的各阶导数应该怎么求呢?
- 归纳可知

$$y^{(4k)} = (-4)^k e^x \cos x, \qquad y^{(4k+1)} = (-4)^k e^x(\cos x - \sin x),$$

$$y^{(4k+2)} = -2(-4)^k e^x \sin x, \qquad y^{(4k+3)} = -2(-4)^k e^x \cos x,$$

- 我们可以将其改写为 $y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$.
- 一般地, $\left(e^{\lambda x}\cos\omega x\right)^{(n)} = \left(\lambda^2+\omega^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{\lambda x}\cos(\omega x + n\theta)$, 其中 θ 是点 (λ, ω) 的辐角.

- 常用高阶导数公式

$$(x^{\mu})^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n},\qquad (x^{n})^{(n)}=n!.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n}n!}{x^{n+1}},\qquad [\ln|x|]^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^{n}}.$$

$$\left(e^{\lambda x}\right)^{(n)}=\lambda^{n}e^{\lambda x}$$

$$(\sin\omega x)^{(n)}=\omega^{n}\sin\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}\right),\qquad (\cos\omega x)^{(n)}=\omega^{n}\cos\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

3.4 隐函数与参数方程确定函数的求导方法

- 隐函数的求导方法
- 关于隐函数的导数，我们很自然地想到求出隐函数的显式表达，然后按显函数的求导方法来求.
- 例如二元方程 $x^2+y^2=1, y>0$ 确定的 y 是 x 的隐函数，我们可以得到 $y=\sqrt{1-x^2}$，则 $y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- 然而并不是所有的隐函数都有显式表达，例如开普勒方程

$$x-y+\varepsilon\sin y=0\ (0<\varepsilon<1).$$

- 此时我们该如何求其导数?

- 一般而言，在一定条件下，二元方程 $F(x,y)=0$ 确定了 y 是 x 的隐函数 $y=y(x)$，代入方程可以得到 $F[x,y(x)]=0$.
- 方法 如果隐函数 $y=y(x)$ 可导，我们可以在上式两边同时对 x 求导，则有

$$\frac{dF[x,y(x)]}{dx}=0,\qquad \text{即}\ \frac{dF[x,y]}{dx}=0.$$

- 然后从中解出 $\frac{dy}{dx}$ 即可.
- 注意 在求导过程中，应始终将 $y=y(x)$ 视为 x 的函数，因此 $F(x,y)$ 是 x 的复合函数.
- 即便从 $F(x,y)=0$ 确定的 y 是一个多值函数，我们也可以用此方法确定所有导数存在的点处的导数值.

- **例** 设 $x^2 + 2y^2 = 1$，求 $\frac{dy}{dx}$.
- **解** 在方程两边同时对 x 求导得 $2x + 4y\frac{dy}{dx} = 0$,
- 解得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}\ (y \neq 0)$.
- 注意 $\frac{d}{dx}(2y^2) = 4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 而不是 $4y$，实际上 $\frac{d}{dy}(2y^2) = 4y$.
- **例** 设 $x - y + \varepsilon \sin y = 0$，求 y'.
- **解** 在方程两边同时对 x 求导得

$$1 - y' + \varepsilon \cos y \cdot y' = 0,$$

- 解得 $y' = \frac{1}{1-\varepsilon \cos y}\left(\cos y \neq \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

- 例 设 $xy = e^{x+y}$, 求 y'.
- 解 在方程两边同时对 x 求导得

$$y + xy' = e^{x+y}(1 + y'),$$

- 解得 $y' = \frac{e^{x+y} - y}{x - e^{x+y}} \ (x \neq e^{x+y})$.
- 也可以写成 $y' = \frac{xy - y}{x - xy} = \frac{(x-1)y}{x(1-y)} \ (x \neq 0, y \neq 1)$.
- 隐函数的导数表达方式不唯一, 但本质上是唯一的.
- 在这个例子中实际上, $x \neq 0, y \neq 1$ 恒成立.

- **例** 求椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 处的切线方程.
- **解** 在方程两边同时对 x 求导得

$$\frac{x}{2}+\frac{2yy'}{3}=0,$$

- 解得 $y'=-\frac{3x}{4y}\ (y\neq 0)$.
- 因此该椭圆在点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 处的切线斜率为 $-\frac{3\times 1}{4\times\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$, 切线方程为

$$y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x-1),\qquad \text{即 } x+2y=4.$$

- **例** 设 $x^2 - xy + 1 = e^y$, 则 $\frac{dy}{dx}|_{x=0} =$______.
- **解** 在方程两边同时对 x 求导得

$$2x - y - xy' = e^y y',$$

- 解得 $y' = \frac{2x-y}{e^y+x}$. 所以 $y'(0) \cancel{=} -\frac{y}{e^y}$.
- 这并不正确, 我们还需要计算出 $x = 0$ 时 y 的值.
- 当 $x = 0$ 时, $1 = e^y, y = 0$, 故 $y'(0) = 0$.

- **例** 设 $x+y+\sin y=0$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.
- **解** 两边同时对 x 求导得 $1+y'+\cos y\cdot y'=0$, 解得 $y'=-\frac{1}{\cos y+1}$, 所以

$$y''=\frac{1}{(\cos y+1)^2}\cdot(-\sin y)\cdot y'=\frac{\sin y}{(\cos y+1)^3}.$$

- 也可以由上述等式再次求导得

$$y''-\sin y\cdot y'\cdot y'+\cos y\cdot y''=0,$$

- 所以 $y''=\frac{1}{\cos y+1}\cdot\sin y\cdot(y')^2=\frac{\sin y}{(\cos y+1)^3}$.

- 设 $y=f(x)$ 有反函数, 则它的反函数为 $x=f(y)$.
- 于是 $1=f'(y)y', y'=\frac{1}{f'(y)}$. 此即反函数求导法则.
- 对数求导法
- 当 $f(x)$ 较复杂, 而 $\ln f(x)$ 较简单时, 将 $y=f(x)$ 两边取对数得 $\ln y=\ln f(x)$, 再利用隐函数求导法求出 $f'(x)$.

- 例 设 $y=\sqrt{\frac{(x+5)(x-4)^2}{(x-2)^3\sqrt[3]{x+4}}}$, 求 y'.
- 解 $\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln(x+5)+2\ln(x-4)-3\ln(x-2)-\frac{1}{3}\ln(x+4)\right]$,

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+5}+\frac{2}{x-4}-\frac{3}{x-2}-\frac{1}{3(x+4)}\right],$$

- 因此 $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+5)(x-4)^2}{(x-2)^3\sqrt[3]{x+4}}}\left[\frac{1}{x+5}+\frac{2}{x-4}-\frac{3}{x-2}-\frac{1}{3(x+4)}\right]$.
- 注意, 由于 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$, 故可不比讨论对数中真数的正负号. 虽然过程不严谨, 但此解法已经默认为常用方法.

- 例 设 $y = x^x$, 求 y'.
- 解 $\ln y = x \ln x$, $\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$, $y' = x^x(\ln x + 1)$.
- 这种方法等价于对 $y = e^{\ln y}$ 利用复合函数求导法则.

$$y' = e^{\ln y} \cdot (\ln y)' = y(\ln y)'.$$

- 例如

$$(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

- 由参变量方程所确定的函数的求导法则

- 设函数满足参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, t 为参数. 如果能从中消去参数, 化为显函数或隐函数, 则可利用前面介绍的方法求其导数.

- 例 设 $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$, 则 $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ $(x \neq 0)$.

- 例 设 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, 则 $x^2 + y^2 = 1$, $y' = -\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$.

- 如果不能从中消去参数, 我们该如何求其导数呢?

- 设 $\varphi(t),\psi(t)$ 均可导, 且 $x=\varphi(t)$ 在 t 的某个区间内单调, 则由反函数存在定理知, 存在连续、可导的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 这样 $y=\psi(t)$ 与 $t=\varphi^{-1}(x)$ 就构成了复合函数 $y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$. 于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

- 直观理解就是, 当 $\Delta t\to 0$ 时, $\Delta x\to 0$, 于是

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta y/\Delta t}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta x/\Delta t}=\frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

- 如果 $\varphi(t),\psi(t)$ 具有二阶导数, 则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{dx/dt}=\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

- 注意不是 $\frac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$ 也不是 $\frac{\psi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}$.

- 例 设 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$，求 y''.
- 解

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 + 3} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 1 - \frac{2}{t^2 + 1},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\dfrac{2}{(t^2 + 1)^2} \cdot 2t}{3t^2 + 3} = \frac{4t}{3(t^2 + 1)^3}.$$

- 例 设 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$, 求 y''.
- 解

$$y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$y'' = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{[\cos t\,(1-\cos t) - \sin t\cdot\sin t](1-\cos t)^{-2}}{a(1-\cos t)}$$

$$= \frac{\cos t - 1}{a(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

- 例 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的法线方程为______.

- 解 $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t$, 因此 $y'|_{t=1} = 1$, 法线斜率为 $\frac{-1}{1} = -1$. 由于 $x|_{t=1} = \frac{\pi}{4}, y|_{t=1} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$, 因此法线方程为

$$y - \frac{1}{2}\ln 2 = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad 即\ x + y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

- 极坐标系中的问题可以转化为直角坐标中的参数方程问题

极坐标中 $r=r(\theta)\Leftrightarrow$ 直角坐标系中 $\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$，$\theta$ 为参数.

- 例 求对数螺旋线 $r=e^{\theta}$ 在 $\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的极坐标方程.

- 解 由题意得 $\begin{cases} x=e^{\theta}\cos\theta \\ y=e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$，

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta},\qquad y'\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1.$$

- 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=0, y=e^{\frac{\pi}{2}}$，相应的切线方程为 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$.
- 化成极坐标为 $r\cos\theta+r\sin\theta=e^{\frac{\pi}{2}}$，即 $r=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\cos\theta+\sin\theta}$.
- 一般地，设曲线 $r=r(\theta)$，$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$.
- 于是在 $[r(\theta_0),\theta_0]$ 处的切线极坐标方程为

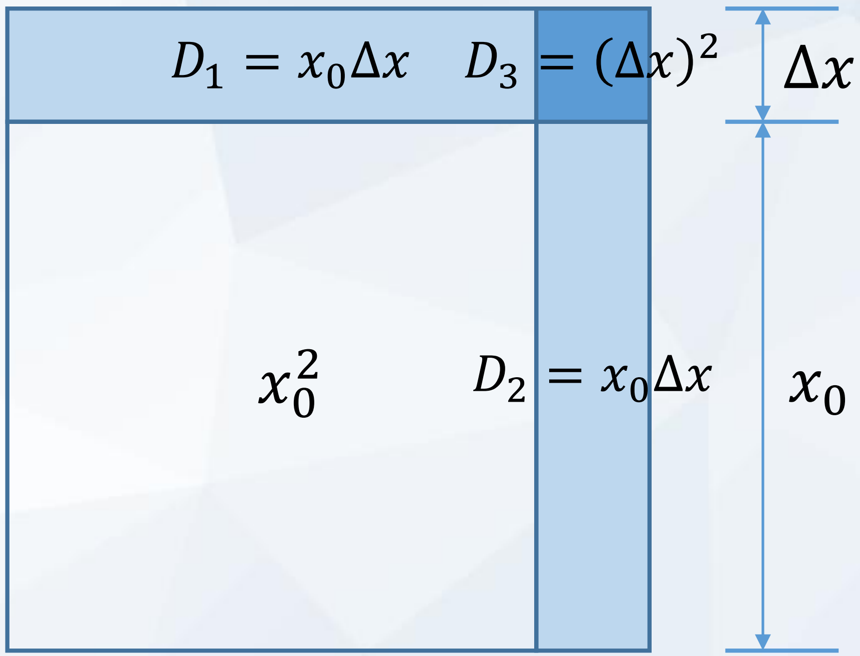
$$[r'(\theta_0)\sin\theta_0+r(\theta_0)\cos\theta_0]\cdot[r\cos\theta-r(\theta_0)\cos\theta]$$
$$=[r'(\theta_0)\cos\theta_0-r(\theta_0)\sin\theta_0]\cdot[r\sin\theta-r(\theta_0)\sin\theta],$$

即 $$r=\frac{r(\theta_0)}{\cos(\theta-\theta_0)-r(\theta_0)^{-1}r'(\theta_0)\sin(\theta-\theta_0)}.$$

3.5 函数的微分

- 对于一个给定的函数 $y=f(x)$, 如果在某点 x_0 处给自变量 x 一个增量 Δx, 就可以得到相应的函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.
- 一般而言, Δy 与 Δx 的关系非常复杂, 这给 Δy 的计算带来困难. 但如果允许有一定的误差, 我们是否能够寻求一种简便的方法, 来近似计算 Δy 呢? 这个问题就是本节将要介绍的微分问题.
- 例 一块正方形金属薄片受温度变化的影响, 其边长由 x_0 变成了 $x_0+\Delta x$, 问此薄片的面积 S 改变了多少?

- 解 $\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)$
- $= (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$.
- 其中 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数, 称为 ΔS 的线性主部.
- 当 $\Delta x \to 0$ 时, $(\Delta x)^2$ 是 Δx 的高阶无穷小.
- 当 $|\Delta x|$ 充分小时, $(\Delta x)^2$ 相比于 $|\Delta x|$ 非常小, 可以忽略不计, 则增量 ΔS 可近似用 $2x_0\Delta x$ 代替, 即 $\Delta S \approx 2x_0\Delta x$.
- 这给 ΔS 的近似计算带来方便, 并且误差也很小.



- 在实际问题中，有许多函数具有这种特征，即函数的增量 $\Delta y = f(x_0 +$

- **定理** 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微当且仅当 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导. 此时 $A = f'(x_0)$.

- **证明** 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, 即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right] = 0.$$

- 因此 $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$, 从而 $\alpha \Delta x = o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$. 故

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x.$$

- 所以函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微且 $A = f'(x_0)$.

- 反过来，若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，存在 A 使得

$$\Delta y=A\Delta x+\beta,\beta=o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0).$$

- 于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+\beta}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\beta}{\Delta x}=A,$$

- 从而函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导且 $f(x_0)=A$.
- 由此可见, 可微和可导是等价的. 自然地, 我们可以定义在区间上可微函数的概念.

- 函数 $y = f(x)$ 的微分记作 $dy = df(x) = f'(x)\Delta x$.
- 当 $y = f(x) = x$ 时, $dx = \Delta x$, 因此我们直接记 dx 为 x 的微分. 从而 $dy = f'(x)dx$, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. 这就是为什么我们也将导数记为 $\frac{dy}{dx}$ 的原因. 因此我们也将导数称为微商.
- 我们可以将 dy 理解为 Δx 极小时的 Δy, 这样很自然地有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

- 这样从微分角度重新得到了逆函数、复合函数、参数方程的求导法则.

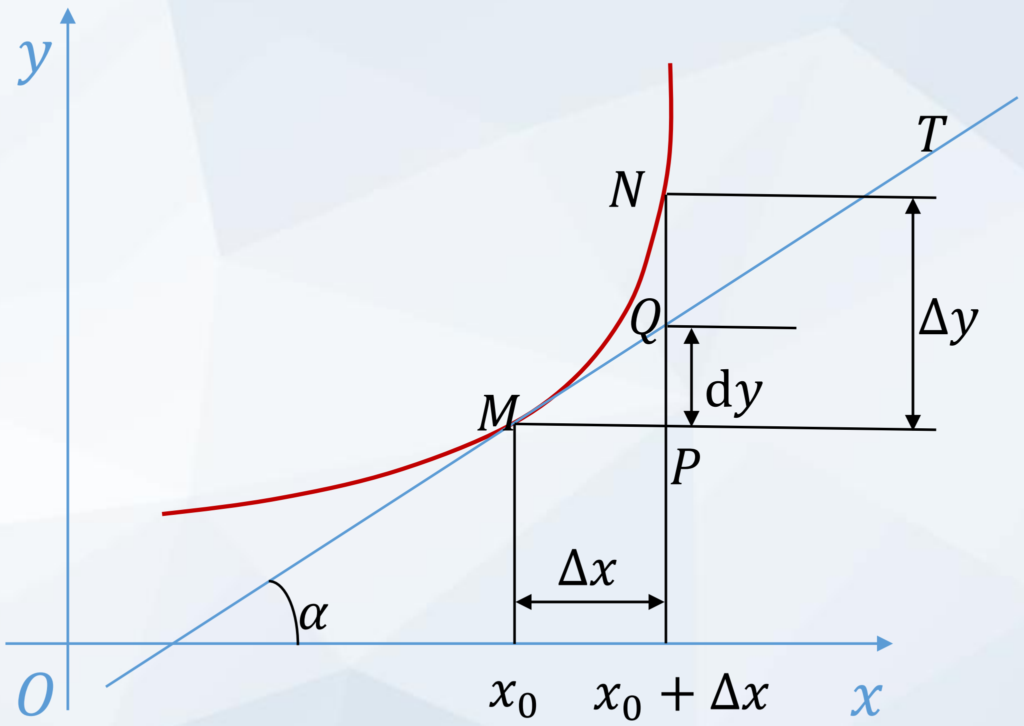
- 微分的几何意义

- 在曲线 $y=f(x)$ 上取一点 $M(x_0,y_0)$ 及其邻近点 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$. 过 M 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 MT, 设其倾角为 α, 则切线 MT 的斜率为 $\tan\alpha=f'(x_0)$, 故

- $dy|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x=\tan\alpha\cdot\Delta x=PQ$ 是切线纵坐标的改变量;

- $\Delta y=PN$ 是曲线纵坐标的改变量;

- $\Delta y-\mathrm{d}y|_{x=x_0}=PN-PQ=QN=o(\Delta x)$.



- 由此可见，一般 $dy \neq \Delta y$. 如果 $dy = \Delta y$, 则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y=dy=f'(x_0)\Delta x,$$

- 从而在 x_0 附近有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 即 $f(x)$ 是一次函数.
- 微分的四则运算
- 从导数的四则运算可知

$$d(u\pm v)=du\pm dv, \qquad d(Cu)=Cdu,$$

$$d(uv)=vdu+udv, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

- 证明 $d(u\pm v)=(u\pm v)'dx=u'dx\pm v'dx=du\pm dv$, 其它情形类似.

- 微分形式的不变性
- 设函数 $y = f(u)$ 可微.
- 如果 u 是自变量, 则有 $dy = f'(u)du$.
- 如果 u 是另一变量 x 的可微函数 $u = \varphi(x)$, 则 $y = f[\varphi(x)]$ 是复合函数.

  因此 $dy = \big[f[\varphi(x)]\big]'dx = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = f'(u)du$.
- 这表明不论 u 是自变量还是中间变量, 总有 $dy = f'(u)du$. 这一性质称为微分形式的不变性.

- 例 设 $y = e^x \sin x$, 求 $dy, dy|_{x=\frac{\pi}{4}}, dy|_{x=\frac{\pi}{4},\Delta x=-0.1}$.
- 解 根据微分公式我们只要求出函数的导数, 就可以求得函数的微分.
- 由于 $y' = e^x(\sin x + \cos x)$, 因此

$$dy = e^x(\sin x + \cos x)\mathrm{d}x.$$

- 我们也可以直接由微分形式的四则运算得

$$\begin{aligned} dy &= \sin x\, d(e^x) + e^x d(\sin x) = e^x \sin x\, dx + e^x \cos x\, dx \\ &= e^x(\sin x + \cos x)dx. \end{aligned}$$

- 于是

$$dy\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = e^x(\sin x + \cos x)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} dx = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}dx,$$

$$dy\Big|_{x=\frac{\pi}{4},\Delta x=-0.1} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \times (-0.1) = -0.1\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}.$$

- 例 设 $y=e^{\arctan(x^2)}$, 利用微分运算求 dy 并求 y'.
- 解

$$dy=e^{\arctan(x^2)}d\left[\arctan(x^2)\right]$$

$$=e^{\arctan(x^2)}\cdot\frac{d\left(x^2\right)}{1+x^4}$$

$$=e^{\arctan(x^2)}\cdot\frac{2xdx}{1+x^4},$$

- 故 $y'=e^{\arctan(x^2)}\cdot\frac{2x}{1+x^4}$.
- 当函数较复杂时，这种利用微分反过来求导数的方法可以保持较高的计算准确率.

- 例 求 $\frac{d}{d(x^2)}\left(\ln x+\frac{2}{x^2}\right)$.
- 解

$$\frac{d}{d(x^2)}\left(\ln x+\frac{2}{x^2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}-2\cdot\frac{2}{x^3}\right)dx}{2x\,dx}=\frac{x^2-4}{2x^4}=\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x^4}.$$

- 也可以先做变量替换，设 $t=x^2$，则 $\ln t=2\ln x$，从而

$$\frac{d}{d(x^2)}\left(\ln x+\frac{2}{x^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ln t+\frac{2}{t}\right)=\frac{1}{2t}-\frac{2}{t^2}=\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x^4}.$$

- 显然，第一种更直接.

- 微分的应用
- 微分可应用于近似计算.
- 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，所以 $\Delta y - dy|_{x=x_0} = o(\Delta x)$.
- 当 x 在 x_0 附近时，我们有

$$f(x)=f(x_0)+\Delta y=f(x_0)+dy\Big|_{x=x_0}+o(\Delta x)$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(\Delta x).$$

- 当 x 离 x_0 很近时，即 $|\Delta x|$ 很小时，我们有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

- 这被称为 $f(x)$ 的一阶近似.

- 例 在点 $x = 0$ 附近, 求 $f(x) = e^x$ 的一阶近似.
- 解 由于 $f'(x) = e^x, f(0) = f'(0) = 1$, 因此当 $|x|$ 较小时, $f(x)$ 的一阶近似为

$$f(x) = e^x \approx f(0) + f'(0)x = 1 + x.$$

- 同理, 当 $|x|$ 较小时

$$\sin x \approx x, \qquad \tan x \approx x, \qquad \arctan x \approx x, \qquad \arctan x \approx x,$$

$$e^x \approx 1 + x, \qquad \ln(1+x) \approx x, \qquad (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

- 例 求 $\sqrt[5]{270}$ 的近似值.
- 解 当 $|x|$ 较小时 $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$.
- 由于 $270=243+27=3^5\left(1+\frac{1}{9}\right)$, 因此

$$\sqrt[5]{270}=3\sqrt[5]{1+\frac{1}{9}} \approx 3\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}\right)=\frac{46}{15} \approx 3.0667.$$

- **例** 求 $\sin 30°30'$ 的近似值.
- **解** $\sin 30°30' = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right)$.
- 取 $x_0 = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}, f(x) = \sin x$, 则 $f'(x) = \cos x$. 由于

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

因此

$$\sin 30°30' = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{360}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{360} \approx 0.5076.$$

- 例 设有半径为 10cm 的金属球, 加热后半径增大了 0.001cm, 问球体积约增加多少?
- 解 半径为 r 的球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.
- 根据题意, 取 $r_0=10, \Delta r=0.001$, 则体积增量约为

$$\Delta V\approx dV=V'(r_0)\Delta r=4\pi r_0^2\Delta r\approx 4\times 3.14\times 10^2\times 0.001=1.256\ \mathrm{cm}^3.$$

- 从上面几个例子我们可以看到, 利用微分来作近似计算还是比较方便的.
- 但令人遗憾的是, 利用微分进行近似计算时, 其误差是多少, 我们并不清楚, 从而不能控制误差. 究其原因是我们对 $|\Delta y-dy|_{x=x_0}=|o(\Delta x)|$ 了解甚少.
- 在第四章中我们将有更精确的方法来解决这一问题.

习题课

- 习题3-1
- (A)1.(1) 正确, 因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

- (2) 错误, 在一点可导和这一点取值一定相关.
- 反例: $f(x)=|x|, x_0=0$, 则 $f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1, A=0.$

- 2. 由于

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x},$$

- 因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\right]$$

$$=f'(x_0)+-\frac{1}{2}f'(x_0)=\frac{3}{2}f'(x_0).$$

- 我们也可以用一阶近似公式来解.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),\qquad \Delta x=x-x_0.$$

- 因此

$$f(x_0+2\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot 2\Delta x+o(\Delta x),$$

$$f(x_0-\Delta x)=f(x_0)-f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{3}{2}f'(x_0)+\frac{o(\Delta x)}{2\Delta x}\right]=\frac{3}{2}f'(x_0).$$

- 3. 从定义出发.

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x\,.$$

- 在学习了求导的运算法则后,

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\sin x\,.$$

- 4. 当时间为 $t+\Delta t$ 时温度为 $T(t+\Delta t)$, 于是时间 $[t,t+\Delta t)$ 内的平均温度差为 $T(t+\Delta t)-T(t)$. 令 $\Delta t\to 0$, 则 t 时刻温度变化速度为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=T'(t).$$

- 5. 由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x^{-\frac{2}{3}}=\infty$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在 0 处不可导.
- 由于 $f'(0)=\infty$, 因此切线为 $x=0$.
- 一般地, 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $[x_0,f(x_0)]$ 处存在切线, 则 $f'(x_0)$ 存在或者为无穷大.

- 6. 由于 $y' = -\sin x\,, y'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因此切线方程为

$$y + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right), \qquad \sqrt{3}x - 2y = 1 + \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}.$$

- 7.(1) 由于

$$f'_{+}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{-\sin \Delta x}{\Delta x} = -1,$$

- 因此在 0 处不可导.

- (2) 由于

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0,$$

- 因此在 0 处可导且 $f'(0)=0$.
- 8. 首先 $f(x)$ 在 1 处连续, 因此 $f(1^-)=f(1)=f(1^+)$, $e=a+b$.
- 由于 $f(x)$ 在 1 处连续, 因此

$$f'_+(1)=(ax+b)'\Big|_{x=1}=a,\qquad f'_-(1)=(e^x)'\Big|_{x=1}=e.$$

- 从而 $f'(1)=a=e, b=0$.

- 当 $x<1$ 时, $f'(x)=(e^x)'=e^x$.
- 当 $x>1$ 时, $f'(x)=(ex)'=e$. 故

$$f'(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 1 \\ e, & x>1 \end{cases}.$$

- (B)1. 由于 $x\to 0$ 时 $\cos x-1\to 0$, 因此

$$f'(x_0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+\cos x-1)-f(x_0)}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+\cos x-1)-f(x_0)}{-\frac{1}{2}x^2},$$

- 原极限为 $-\frac{1}{2}f'(x_0)$.

- 我们也可以用一阶近似公式 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$, $\Delta x=x-x_0$.

$$\begin{aligned} f(x_0+\cos x-1) &= f(x_0)+f'(x_0)\cdot(\cos x-1)+o(\cos x-1) \\ &= f(x_0)+f'(x_0)\cdot(\cos x-1)+o\left(x^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+\cos x-1)-f(x_0)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{f'(x_0)(\cos x-1)}{x^2}+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}\right] \\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{f'(x_0)\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}\right]=-\frac{1}{2}f'(x_0). \end{aligned}$$

- 2. (A) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\left[\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right]\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}x\right)=0$, 因此 $f(0)=0$.

- (B) $2f(0)=\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=\left[\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}\right]\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}x\right)=0$，因此 $f(0)=0$.
- (C) 由于 $f(0)=0$，因此 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在.
- (D) 错误，例如 $f(x)=|x|$.
- 3. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[f(x)+1]=\left[\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)+1}{2x-1}\right]\cdot\left[\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)\right]=3\cdot 0=0.$
- 由于 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处可导，从而连续，$f\left(\frac{1}{2}\right)+1=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=-1.$
- 所以 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)+1}{x-\frac{1}{2}}=2\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)+1}{2x-1}=6.$

- 4.(1) $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$ 存在.
- (2) $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{|x-a|\varphi(x)-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\varphi(x)=\varphi(a)$, 类似地 $f'_-(a)=-\varphi(a)$.
- 因此当且仅当 $\varphi(a)=0$ 时极限存在且 $f'(a)=0$.
- 5. 由于

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\overset{\text{偶函数}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{-t}=-f'(0),$$

- 因此 $f'(0)=0$.

- 习题3-2
- (A)1.(1) 正确, 因为

$$v=(u+v)-u=u-(u-v),$$

- 如果 $u\pm v$ 和 u 均可导, 则 v 也可导.
- (2)错误, 例如 $u(x)=0$.
- 2(1) $y'=3(1+\sin x)^2(1+\sin x)'=3\cos x\,(1+\sin x)^2$.
- (2) $y'=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$

$$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x\,.$$

- (3) $$y' = \frac{(\sec x + \tan x)'}{\sec x + \tan x} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\sec x + \tan x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x\,.$$

- (4) $$y' = \sqrt{a^2 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\left(a^2 - x^2 - x^2 + a^2\right) = 2\sqrt{a^2 - x^2}.$$

- (5) $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)' = \dfrac{(x-1)^2}{2x^2+2} \cdot \left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)'$

$$= \frac{(x-1)^2}{2x^2+2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

- (6) $y' = n\sin^{n-1}x \cdot \cos x \cdot \cos nx + \sin^n x \cdot (-n\sin nx)$

$$= n\sin^{n-1}x\,(\cos x \cdot \cos nx - \sin x \cdot \sin nx)$$

$$= n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,.$$

- 3

$$y = e^{u(x)\ln v(x)} = e^{u(x)\ln v(x)} \cdot [u(x)\ln v(x)]'$$

$$= v(x)^{u(x)} \cdot \left[u'(x)\ln v(x) + u(x)\cdot\frac{v'(x)}{v(x)}\right].$$

- 也可以用对数求导法. 因此

$$\left(x^{\sin x}\right)' = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

- (B)1.(1) 错误, 例如 $u = x^2, y = |u| = x^2$.
- (2) 错误, 例如 $f(x) = 0$.

- 2(1) $y' = e^{\sin^2\frac{1}{x}} \cdot 2\sin\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}e^{\sin^2\frac{1}{x}}$.

- (2) $y = \ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right) - \ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$,

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)\left(\sqrt{1+e^x}\right)'$$

$$= \frac{2}{e^x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^x}} \cdot e^x = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}.$$

- （3） $y' = \dfrac{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \left[1+\dfrac{\left(x+\sqrt{x}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \left(1+\frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)$$

$$= \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}{8\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

- (4) $y' = (\sin\ln x + \cos\ln x) + x\left(\cos\ln x \cdot \dfrac{1}{x} - \sin\ln x \cdot \dfrac{1}{x}\right)$

  $= 2\cos\ln x\,.$

- 3 $y' = \dfrac{\left[f^2(x) + g^2(x)\right]'}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}} = \dfrac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}.$
- 习题3-3
- (A)1.(1) $f'''(x) = 8 \cdot 7 \cdot 6(x-10)^5,\ f'''(11) = 336.$
- (2) $y' = \dfrac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x\,,\qquad y'' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

- 2. $y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$,

  $y'' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$,
- 因此

$$y'' - 2y' + 2y = e^x[2\cos x - 2(\sin x + \cos x) + 2\sin x] = 0.$$

- 3(1) $y' = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$,

$$y'' = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) + e^x\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

- 也可以 $y'' = (e^x)''x^{-1} + 2(e^x)'(x^{-1})' + e^x(x^{-1})'' = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$.

- (2) $y' = e^x\cos x - e^x\sin x = e^x(\cos x - \sin x)$,

  $y'' = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x\sin x$,

  $y''' = -2e^x(\sin x + \cos x)$,

  $y^{(4)} = -4e^x\cos x$.

- 也可以 $y^{(4)} = e^x\cos x - 4e^x\sin x - 6e^x\cos x + 4e^x\sin x + e^x\cos x = -4e^x\cos x$.

- 4. $y' = f'(x^2)\cdot 2x$,

  $y'' = f''(x^2)\cdot 2x\cdot 2x + f'(x^2)\cdot 2 = 4x^2f''(x^2) + 2f'(x^2)$.

- (B)1.(1) $y=\dfrac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]$,

$$y'=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{x^2-1},\qquad y''=-\frac{2x}{(1-x^2)^2},\qquad y''\Big|_{x=0}=0.$$

- 实际上 $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^n}-\frac{1}{(x+1)^n}\right]$.
- (2) $x\geq 0$ 时, $f(x)=x^3, f_+'(x)=3x^2, f_+''(x)=6x, f_+'''(x)=6$;
- $x\leq 0$ 时, $f(x)=-x^3, f_-'(x)=-3x^2, f_-''(x)=-6x, f_-'''(x)=6$.
- 因此 $f'(0)=0, f''(0)=0, f''(0)$ 不存在, $n=2$.

- 2.(1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{y'}\right)$

$$=\frac{1}{y'}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)=\frac{1}{y'}\cdot\left(-\frac{y''}{(y')^2}\right)=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

- (2) $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)=-\dfrac{1}{y'}\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{y''}{(y')^3}\right]$

$$=-\frac{1}{y'}\cdot\left[\frac{y'''}{(y')^3}-\frac{y''\cdot 3y''}{(y')^4}\right]=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.$$

- 3.(1) $y^{(20)} = x^2(\cos x)^{(20)} + 20 \cdot 2x(\cos x)^{(19)} + 190 \cdot 2(\cos x)^{(18)}$

$$= x^2 \cos\left(x + 20 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 40x \cos\left(x + 19 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 380 \cos\left(x + 18 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= x^2 \cos x + 40x \sin x - 380 \cos x \,.$$

- (2) $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, 因此 $y^{(n)} = -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

- 4. $y'' = 2[f(e^{-x})]' + x[f(e^{-x})]''$

$$= 2f'(e^{-x})(-e^{-x}) + x[f'(e^{-x}) \cdot (-e^{-x})]'$$

$$= -2f'(e^{-x})e^{-x} + x\left[f''(e^{-x}) \cdot (-e^{-x})^2 + f'(e^{-x}) \cdot e^{-x}\right]$$

$$= xe^{-2x}f''(e^{-x}) + (x-2)e^{-x}f'(e^{-x}).$$

- 5. $f(x) = -1 + \frac{2}{1+x}$, 因此 $f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$.
- 6. 归纳法. $n = 1$ 已经成立.
- 假设 $f^{(n)}(x) = n!\,[f(x)]^{n+1}$, 则

$$f^{(n+1)}(x) = n! \cdot (n+1) f(x)^n f'(x) = (n+1)!\,[f(x)]^{n+2}.$$

- 习题3-4
- (A)1.(1) $2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 2$,

$$y' = \frac{x+y-1}{y-x} = 1 + \frac{2x-1}{y-x}.$$

- (2) $y + xy' = e^{x+y}(1+y')$. 此时我们不必解出 y'.
- 当 $x=0$ 时, $e = e^{y(0)}, y(0) = 1, 1 = e\big(1+y'(0)\big), y'(0) = \frac{1-e}{e}$.
- (3) $2x - y' = e^y y'$, $y' = \frac{2x}{1+e^y}$,

$$y'' = \frac{2}{1+e^y} - \frac{2x}{(1+e^y)^2} \cdot e^y \cdot y' = \frac{2}{1+e^y} - \frac{4x^2 e^y}{(1+e^y)^3}.$$

- 当 $x=0$ 时, $-y(0) + 1 = e^{y(0)}, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1.$
- 也可以直接: $-y'(0) = e^{y(0)} y'(0), y'(0) = 0,$
- $2 - y'' = e^y (y')^2 + e^y y''$, $2 - y''(0) = y''(0)$, $y''(0) = 1.$

- 2. $3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0.$
- 将 $x=\sqrt[3]{2}, y=\sqrt[3]{4}$ 代入得到 $3\sqrt[3]{4}+3\left(\sqrt[3]{4}\right)^2y'-3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}y'=0, y'=0.$
- 因此切线方程为 $y=\sqrt[3]{4}$, 法线方程为 $x=\sqrt[3]{2}.$
- 3.(1) $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{-\sin t}{3t^2}=-\dfrac{\sin t}{3t^2},$

$$\frac{dy'}{dt}=-\frac{\cos t}{3t^2}-\sin t\left(-2\cdot\frac{1}{3}t^{-3}\right)=\frac{2\sin t-t\cos t}{3t^3},$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{2\sin t-t\cos t}{9t^5}.$$

- (2) $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}$,

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{(\cos t + \cos t - t\sin t)(\cos t - t\sin t) - (\sin t + t\cos t)(-\sin t - \sin t - t\cos t)}{(\cos t - t\sin t)^2}$$

$$= \frac{2 + t^2}{(\cos t - t\sin t)^2},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{2 + t^2}{(\cos t - t\sin t)^3}.$$

- 4. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1+t^2-t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$,

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(1-\dfrac{1}{1+t^2}\right)=\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$,

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{2t}{1-t^2}$,

$$x\Big|_{t=2}=\frac{2}{5},\qquad y\Big|_{t=2}=\frac{4}{5},\qquad y'\Big|_{t=2}=-\frac{4}{3}.$$

- 因此切线方程为 $y=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{2}{5}\right)+\frac{4}{5}=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$,
- 法线方程为 $y=\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{5}\right)+\frac{4}{5}=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

- (B)1.(1) $\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{y'}{x}-\dfrac{y}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot(2x+2yy'),$

$$xy'-y=x+yy', y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

$$y'+xy''-y'=1+(y')^2+yy'',$$

$$y''=\frac{1+(y')^2}{x-y}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}.$$

- (2) $y' = e^{xy} + xe^{xy}(y + xy') = e^{xy}\left(1 + xy + x^2y'\right),$

$$y' = \frac{1 + xy}{e^{-xy} - x^2}.$$

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

$$y'' = e^{xy}(y + xy')\left(1 + xy + x^2y'\right) + e^{xy}\left(y + xy' + 2xy' + x^2y''\right),$$

$$y''(0) = 1 + 1 = 2.$$

- 2.(1) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $y'=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{t}{2}$,

$$\frac{dy'}{dt}=\frac{1}{2},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{1+t^2}{4t}.$$

- (2) $\dfrac{dx}{dt}=f''(t)$, $\dfrac{dy}{dt}=f'(t)+tf''(t)-f'(t)=tf''(t)$,

$$y'=\frac{dy/dt}{dx/dt}=t,\qquad \frac{dy'}{dt}=1,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{1}{f''(t)}.$$

- 3.(1) $x = e^{\theta}\cos\theta\,, y = e^{\theta}\sin\theta.$

$$\frac{dx}{d\theta} = e^{\theta}\cos\theta - e^{\theta}\sin\theta\,, \qquad \frac{dy}{d\theta} = e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta\,,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta}, \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi} = 1, x_0 = -e^{\pi}, y_0 = 0.$$

- 切线方程为 $y = x + e^{\pi}$, 法线方程为 $y = -x - e^{\pi}$.

- 习题3-5
- (A)1.(1) $\Delta y = y(1+\Delta x) - y(1)$

$$= (1+\Delta x)^2 + 2(1+\Delta x) - 3$$
$$= 4\Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$dy = 4\Delta x,$$

$$\Delta y\Big|_{\Delta x=1} = 5, \qquad dy\Big|_{\Delta x=1} = 4,$$
$$\Delta y\Big|_{\Delta x=0.1} = 0.41, \qquad dy\Big|_{\Delta x=0.1} = 0.4,$$
$$\Delta y\Big|_{\Delta x=0.01} = 0.0401, \qquad dy\Big|_{\Delta x=0.01} = 0.04.$$

- 2.(1) $d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = xdx.$
- (2) $d(-\sin x) = \cos x\,dx.$
- (3) $d(\ln|1+x|) = \frac{1}{1+x}dx.$
- (4) $d(e^{-x}) = -e^{-x}dx,\quad d(\cot x) = \csc^2 x dx,$
- $d(-e^{-x} - \cot x) = \left(e^{-x} - \csc^2 x\right)dx.$
- 3.(1) $dy = \left(2x\sin 2x + x^2\cos 2x \cdot 2\right)dx = \left(2x\sin 2x + 2x^2\cos 2x\right)dx.$

- (2) $dy = \left[\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a}\right)\right]dx = \frac{dx}{a^2 - x^2}.$

- (3) $dy = \left[\arcsin\frac{x}{2} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x)\right]dx$

  $= \arcsin\frac{x}{2}dx.$

- (4) $dy = [-e^{-x}\cos(x-3) + e^{-x} \cdot (-\sin(x-3))]dx$

  $= -e^{-x}[\cos(x-3) + \sin(x-3)]dx.$

- 4.(1) 由于 $\sqrt[3]{1000}=10$, $997=10^3(1-0.003)$, 所以

$$\sqrt[3]{997}=10(1-0.003)^{\frac{1}{3}}\approx 10\left(1-\frac{1}{3}\cdot 0.003\right)=9.99.$$

- 换种写法, 令 $f(x)=10\sqrt[3]{x}$, 则

$$f'(x)=\frac{10}{3}x^{-\frac{2}{3}},\qquad f'(1)=\frac{10}{3},$$

$$\sqrt[3]{997}=f(0.997)\approx f(1)+f'(1)(0.997-1)$$

$$=10-\frac{10}{3}\cdot 0.003=9.99.$$

- (2) 令 $f(x)=\arctan x$, $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $f'(1)=\frac{1}{2}$,

$$\arctan 1.05=f(1.05)\approx f(1)+f'(1)(1.05-1)=\frac{\pi}{4}+0.025\approx 0.8104.$$

- (3) 令 $f(x)=\ln x$, $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f'(1)=1$,

$$\ln 1.01=f(1.01)\approx f(1)+f'(1)(1.01-1)=0.01.$$

- 5. 球体的体积为 $\frac{4\pi D^3}{3}$, 因此球壳体积

$$V=\frac{4\pi}{3}\left[(D+h)^3-D^3\right]\approx\left(\frac{4\pi D^3}{3}\right)'h=4\pi D^2h.$$

- (B)1. $dy = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}\Delta x + o(\Delta x)^2$, 选 B.
- 2. $e^{xy\ln 2} = x + y, \qquad e^{xy\ln 2}\ln 2\,(y + xy') = 1 + y'.$

$$y(0) = 1, \qquad \ln 2 = 1 + y'(0),$$

$$y'(0) = \ln 2 - 1, \qquad dy = (\ln 2 - 1)dx.$$

- 3. $2y' - 1 = (1 - y')\ln(x - y) + (x - y)\cdot\frac{1}{x-y}\cdot(1 - y')$,

$$y' = 1 - \frac{1}{3 + \ln(x - y)}, \qquad dy = \left[1 - \frac{1}{3 + \ln(x - y)}\right]dx.$$

- 4. $$y' = f'\left(\arcsin x^2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x - \sin f(x) \cdot f'(x),$$

$$dy = \left[f'\left(\arcsin x^2\right) \cdot \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} - \sin f(x) \cdot f'(x)\right] dx.$$

- 总复习题三

- 1.(1) $$f(t) = \lim_{x\to\infty} t\left(\frac{x+t}{x-t}\right)^x = te^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+t}{x-t}-1\right)x} = te^{2t},$$

$$f'(t) = e^{2t} + 2te^{2t} = (2t+1)e^{2t}.$$

- (2) $\cos xy \cdot (y + xy') + \dfrac{1}{y - x} \cdot (y' - 1) = 1,$

$$1 + y'(0) - 1 = 1, \qquad y'(0) = 1,$$

- 切线方程为 $y = x + 1.$

- (3) $\dfrac{dx}{dt} = \cos t\,,\qquad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sin t + t\cos t - \sin t = t\cos t\,,$

$$y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = t, \qquad \frac{dy'}{dt} = 1, \qquad y'' = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{1}{\cos t}, \qquad y''\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

- (4) $f^{(n)}(x)=x^2\cdot(\ln 2)^n\cdot 2^x+n\cdot 2x\cdot(\ln 2)^{n-1}\cdot 2^x$

  $+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot(\ln 2)^{n-2}\cdot 2^x$, $\quad f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$.

- 2.(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-2f(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$, 选 C.

- 也可以代入 $f(x)=x$ 用排除法.

- 也可以 $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)=f'(0)x+o(x)$,

$$xf(x)-2f\left(x^2\right)=f'(0)x^2+o\left(x^2\right)-2f'(0)x^2+o\left(x^2\right)$$
$$=-f'(0)x^2+o\left(x^2\right).$$

$$\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-2f\left(x^2\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-2f\left(x^2\right)}{x^2}=-f'(0)+\lim_{x\to0}\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}=-f'(0).$$

- (2) $\left[f^2(x)\right]'=2f(x)f'(x)>0$, 因此 $f^2(x)$ 单增, $f^2(1)>f^2(-1)$, 选 C.

- (3) $f'(x)=(e^x-1)\left[\left(e^{2x}-2\right)\cdots\left(e^{nx}-n\right)\right]'+e^x\left[\left(e^{2x}-2\right)\cdots\left(e^{nx}-n\right)\right]$,
- $f'(0)=(1-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, 选 A.
- 也可以

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\left(e^{2x}-2\right)\cdots\left(e^{nx}-n\right)$$
$$=(-1)^{(n-1)}(n-1)!.$$

- (4) 选 D.
- 3. $(e^x)'|_{x=0}=e^x|_{x=0}=1$, 因此 $f'(0)=1$. 由于 $f(0)=1$, 因此 $x\to 0$ 时, $f(x)-1\to x$ (不能这么写).

- 因此 $\frac{f(x)-1}{x} \to 1.$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]} = \lim_{t\to 0} \sqrt{\frac{f(2t)-1}{t}} = \lim_{t\to 0} \sqrt{2\cdot\frac{f(2t)-1}{2t}} = \sqrt{2}.$$

- 或者 $f(x) = 1 + x + o(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+\frac{o(1/n)}{1/n}} = \sqrt{2}.$$

- 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^x)-f(1)}{e^x-1}=\lim\limits_{e^x\to 1}\dfrac{f(e^x)-f(1)}{e^x-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(1),$
- 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(e^x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(e^x)-f(1)}{e^x-1}=f'(1).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}=\lim_{\sin x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}=\lim_{t\to 1}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=f'(1),$$

- 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}=f'(1).$$

- 故

$$3f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(e^x)+2f(1+\sin x)-3f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-3f(1)+o(x)}{x}=6.$$

- 这迫使 $f(1)=0, f'(1)=2$, 从而 $f(-1)=0, f'(-1)=2$.
- 切线方程为 $y=2(x+1)=2x+2$.
- 也可以 $f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+o(x-1)$, 于是 $x\to 0$ 时,

$$f(e^x)+2f(1+\sin x)=3f(1)+f'(1)(e^x-1+2\sin x)+o(x)$$

- 由于 $e^x-1=x+o(x), \sin x=x+o(x)$, 因此

$$f(e^x)+2f(1+\sin x)=3f(1)+3f'(1)x+o(x)=6x+o(x)$$

- 所以 $f(1)=0, f'(1)=2$.

- 5. 首先注意到 f 在 x_0 处连续.
- 如果 $f(x_0) \neq 0$, 则由极限的保号性可知存在 x_0 的一个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 使得对任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x)$ 和 $f(x_0)$ 符号相同.
- 于是

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)| - |f(x_0)|}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \operatorname{sgn}[f(x_0)] = \operatorname{sgn}[f(x_0)] \cdot f'(x_0)$$

- 存在, 因此 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导.
- 如果 $f(x_0) = 0$ 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $0 \leq \left|\frac{|f(x)|-0}{x-x_0}\right| = \left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|$.
- 由夹逼准则, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{|f(x)|-0}{x-x_0} = 0$, 因此 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导且导数为 0.

- 如果 $f(x_0)=0$ 且 $f'(x_0)=A>0$, 则由极限的保号性可知存在 x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 使得对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $\frac{f(x)}{x-x_0}>0$.
- 于是

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=-\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{x-x_0}=-f'(x_0),$$

- 因此 $|f(x)|$ 在 x_0 处不可导. $f'(x_0)<0$ 情形类似.
- 综上, 如果 $f(x_0)\neq 0$, 或者 $f(x_0)=0$ 且 $f'(x_0)=0$, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导. 如果 $f(x_0)=0$ 且 $f'(x_0)\neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 处不可导.

- 6. $$y' = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \ln\tan x - \cos x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\sin x} + \sin x \cdot \ln\tan x - \frac{1}{\sin x} = \sin x \cdot \ln\tan x\,.$$

- 7. $$\tan y + x \cdot \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = -\sin xy \cdot (y + xy'),$$

$$y' = -\frac{\tan y + y\sin(xy)}{x(\sin(xy) + \sec^2 y)}, \qquad dy = -\frac{\tan y + y\sin(xy)}{x(\sin(xy) + \sec^2 y)}dx.$$

- 8. $y' = \dfrac{1}{\cos^2[f(x^2)]} \cdot f'(x^2) \cdot 2x,$

$$y'' = -\frac{2}{\cos^3[f(x^2)]} \cdot (-\sin[f(x^2)]) \cdot [f'(x^2) \cdot 2x]^2$$

$$+\frac{1}{\cos^2[f(x^2)]} \cdot f''(x^2) \cdot (2x)^2 + \frac{1}{\cos^2[f(x^2)]} \cdot f'(x^2) \cdot 2$$

$$= 2\sec^2[f(x^2)]\, f'(x^2) + 4x^2 \sec^2[f(x^2)]\, f''(x^2)$$

$$+8x^2 \sec^2[f(x^2)] \tan[f(x^2)]\, f'(x^2)^2.$$

- 9. $\ln x + f(y) = y,\qquad \frac{1}{x} + f'(y)y' = y',$

$$y' = \frac{1}{x[1-f'(y)]},\qquad -\frac{1}{x^2} + f''(y)(y')^2 + f'(y)y'' = y'',$$

$$y'' = \frac{1}{1-f'(y)}\left[f''(y)(y')^2 - \frac{1}{x^2}\right] = \frac{f''(y) - [1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}.$$

- 10. $y\big|_{t=0}=1,\quad \frac{dx}{dt}=6t+2,\quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=2,\quad e^{y}\frac{dy}{dt}\sin t+e^{y}\cos t-\frac{dy}{dt}=0,$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\cos t}{e^{-y}-\sin t},\quad \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=e,\quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t}{(6t+2)(e^{-y}-\sin t)},$$

$$\frac{dy'}{dt}=\frac{-\sin t}{(6t+2)(e^{-y}-\sin t)}$$

$$-\frac{\cos t}{[(6t+2)(e^{-y}-\sin t)]^{2}}\left[6(e^{-y}-\sin t)+(6t+2)\left(-e^{-y}\frac{dy}{dt}-\cos t\right)\right],$$

$$\frac{dy'}{dt}\Big|_{t=0}=-\frac{1}{4e^{-2}}(6e^{-1}-4)=\frac{2e^{2}-3e}{2},\quad \frac{dy'}{dx}\Big|_{t=0}=\frac{2e^{2}-3e}{4}.$$

- 11. $y = x(x+1)^{-\frac{1}{2}}$,

$$y' = (x+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x(x+1)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{x}{2}+1\right)(x+1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y'' = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)(x+1)^{-\frac{5}{2}} = \left(-\frac{x}{4}-1\right)(x+1)^{-\frac{5}{2}},$$

$$y''' = -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}\left(-\frac{x}{4}-1\right)(x+1)^{-\frac{7}{2}} = \left(\frac{3x}{8}+\frac{9}{4}\right)(x+1)^{-\frac{7}{2}},$$

$$y^{(4)} = \frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{7}{2}} - \frac{7}{2}\left(\frac{3x}{8}+\frac{9}{4}\right)(x+1)^{-\frac{9}{2}}$$

$$= \left(-\frac{15}{16}x - \frac{15}{2}\right)(x+1)^{-\frac{9}{2}} = -\frac{15(x+8)}{16(x+1)^4\sqrt{x+1}}.$$

- 另解 $y=(x+1)^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{-\frac{1}{2}}$,
- $y^{(4)}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)(x+1)^{-\frac{7}{2}}-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)(x+$

- 12. $y+xy'=0, y'=-\frac{y}{x}$, 因此在 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)+y_0.$$

- 它与横纵坐标轴的交点分别为 $(2x_0, 0), (0,2y_0)$, 因此面积为

$$\frac{1}{2}(2x_0)(2y_0)=2x_0y_0=2a^2.$$

- 13. $y'=2ax=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, 因此 $x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$.
- 此时 $y=\frac{1}{2}=\ln x=-\frac{1}{2}\ln(2a)$, 因此 $a=\frac{1}{2e}$.